Kapitola XI.
Vlastnosti regulárních jazyků

Pumping lemma pro RJ

Myšlenka: Pumping lemma ukazuje nekonečné iterace některých podřetězců v řetězcích v RJ.

• Nechť L je RJ. Pak existuje $k \geq 1$ takové, že:
pokud $z \in L$ a $|z| \geq k$, **pak** existuje u,v,w: $z = uvw$,
1) $v \neq \varepsilon$ **2)** $|uv| \leq k$ **3)** pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L$

Příklad: pro RV $r = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}$, $L(r)$ je ***regulární.***
Pro tento jazyk existuje $\boldsymbol{k} = 3$ takové, že **1)**, **2)** a **3)** platí.

Pumping lemma pro RJ

Myšlenka: Pumping lemma ukazuje nekonečné iterace některých podřetězců v řetězcích v RJ.

• Nechť L je RJ. Pak existuje $k \geq 1$ takové, že:
pokud $z \in L$ a $|z| \geq k$, **pak** existuje u,v,w: $z = uvw$,
1) $v \neq \varepsilon$ **2)** $|uv| \leq k$ **3)** pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L$

Příklad: pro RV $r = ab^*c$, $L(r)$ je ***regulární.***
Pro tento jazyk existuje $k = 3$ takové, že **1)**, **2)** a **3)** platí.

• pro $z = abc$: $z \in L(r)$ a $|z| \geq 3$: $uv^0w = ab^0c = ac \in L(r)$

$a \to u$, $b \to v$, $c \to w$

$uv^1w = ab^1c = abc \in L(r)$

$uv^2w = ab^2c = abbc \in L(r)$

$\vdots$

$v \neq \varepsilon$, $|uv| = 2 \leq 3$

Pumping lemma pro RJ

Myšlenka: Pumping lemma ukazuje nekonečné iterace některých podřetězců v řetězcích v RJ.

• Nechť L je RJ. Pak existuje $k \geq 1$ takové, že:
pokud $z \in L$ a $|z| \geq k$, **pak** existuje u,v,w: $z = uvw$,
1) $v \neq \varepsilon$ **2)** $|uv| \leq k$ **3)** pro každé $m \geq 0$, $uv^mw \in L$

Příklad: pro RV $r = ab^*c$, $L(r)$ je ***regulární.***
Pro tento jazyk existuje $k = 3$ takové, že **1)**, **2)** a **3)** platí.

• pro $z = \underset{u}{a}\,\underset{v}{b}\,\underset{w}{c}$: $z \in L(r)$ a $|z| \geq 3$:

$v \neq \varepsilon$, $|uv| = 2 \leq 3$

$uv^0w = ab^0c = ac \in L(r)$
$uv^1w = ab^1c = abc \in L(r)$
$uv^2w = ab^2c = abbc \in L(r)$
⋮

• pro $z = \underset{u}{a}\,\underset{v}{b}\,\underbrace{bc}_{w}$: $z \in L(r)$ a $|z| \geq 3$:

$v \neq \varepsilon$, $|uv| = 2 \leq 3$

$uv^0w = ab^0bc = abc \in L(r)$
$uv^1w = ab^1bc = abbc \in L(r)$
$uv^2w = ab^2bc = abbbc \in L(r)$
⋮

⋮

Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:

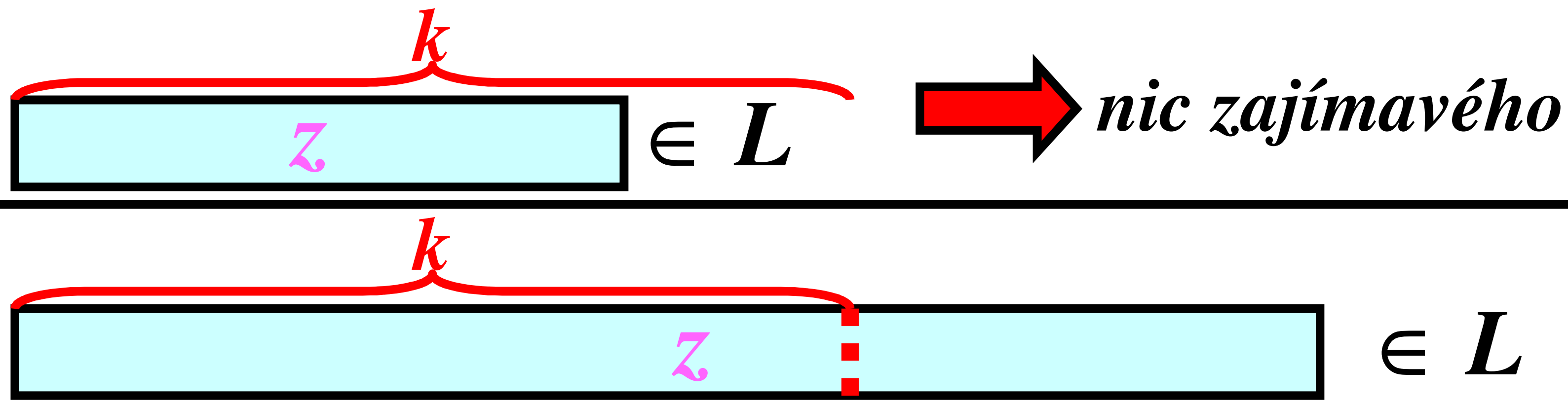
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:

$$\overbrace{\boxed{\quad z \quad}}^{k} \in L \Rightarrow \textit{nic zajímavého}$$

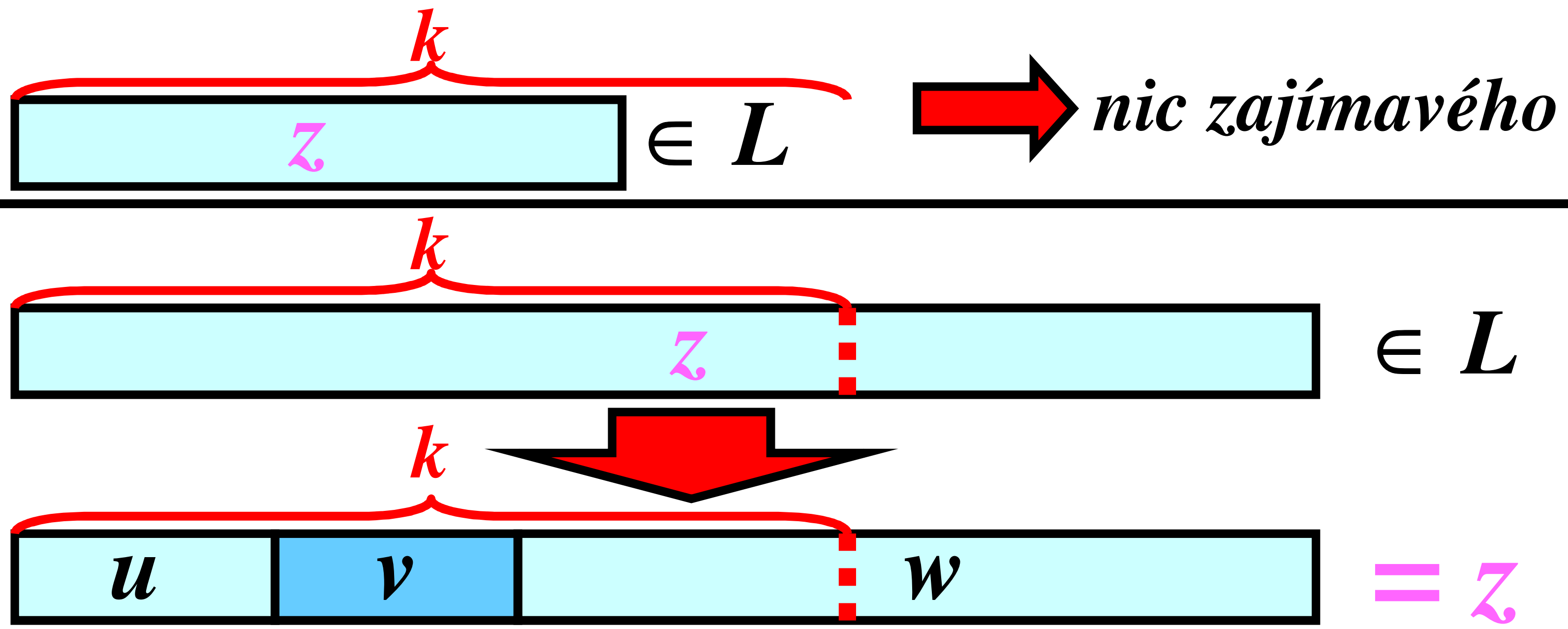
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



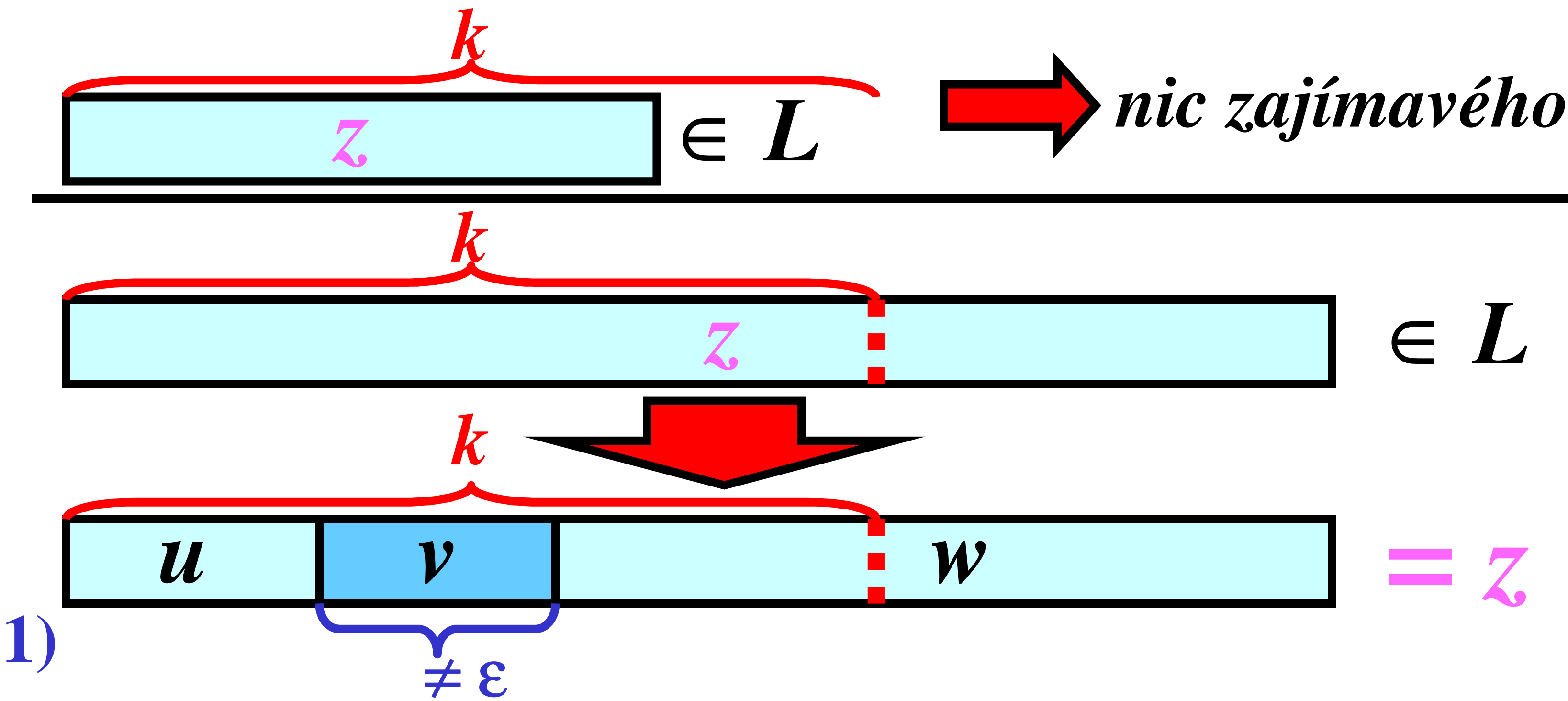
Pumping lemma: Ilustrace

• L = libovolný regulární jazyk:



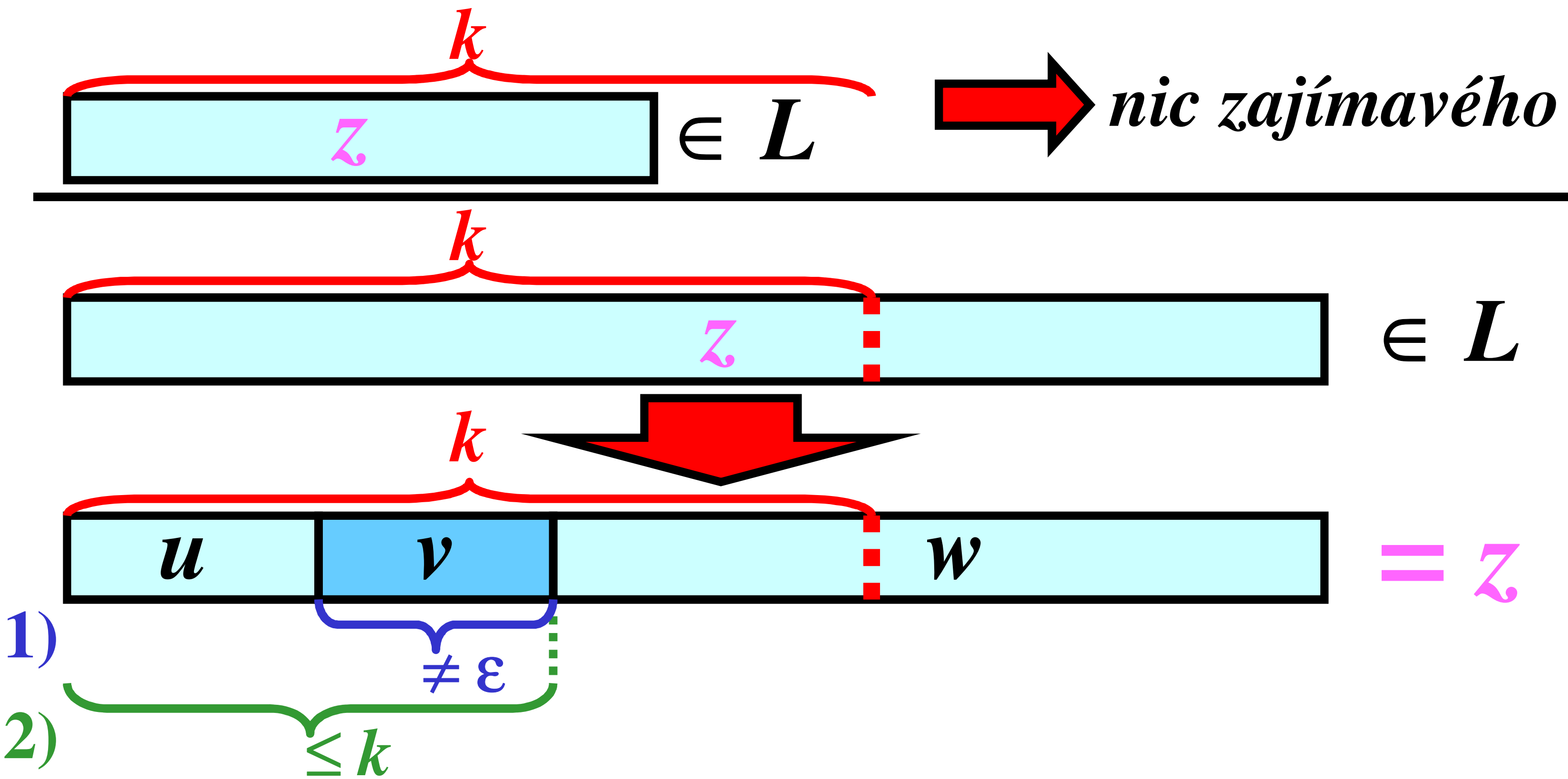
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



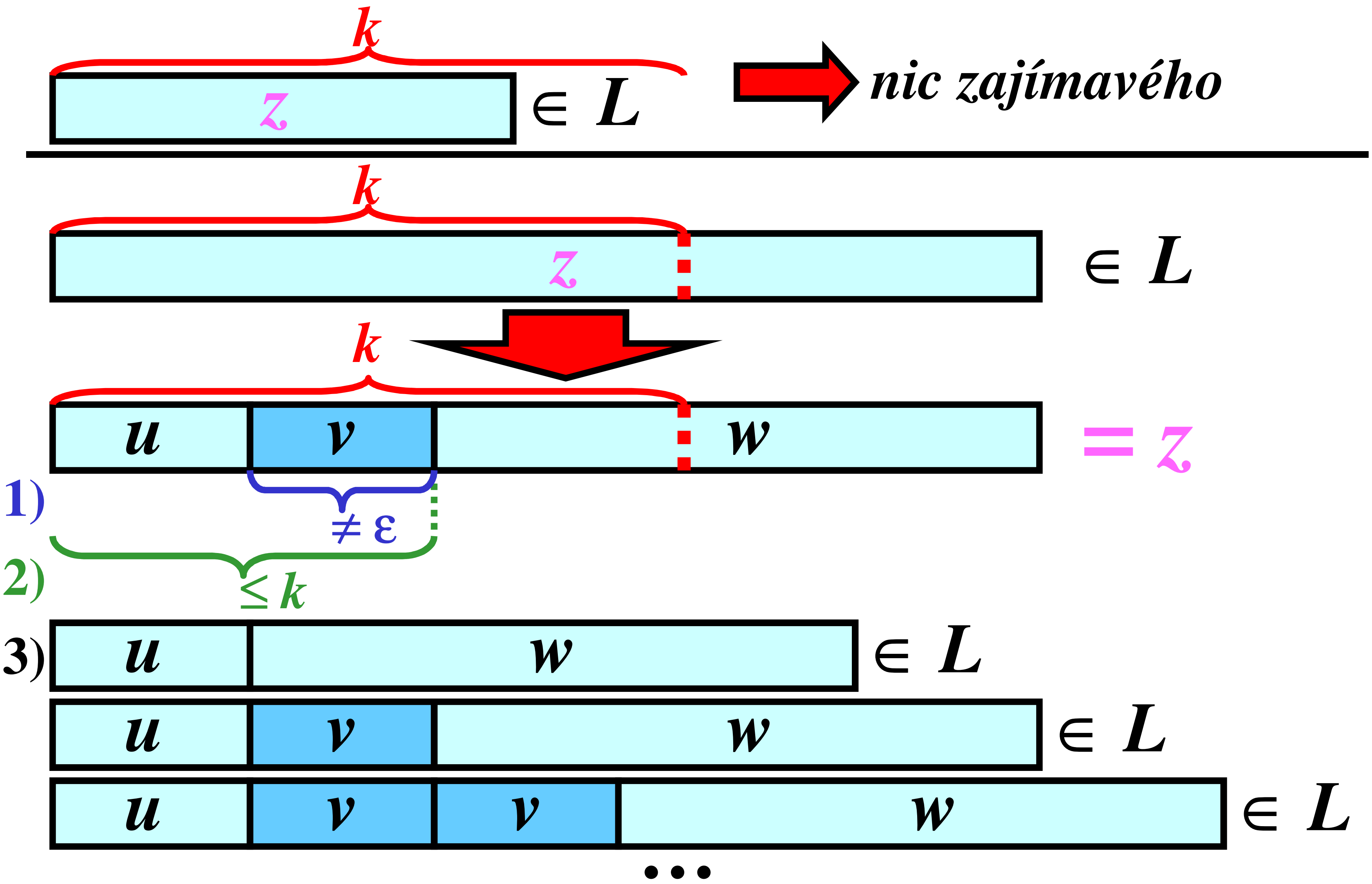
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



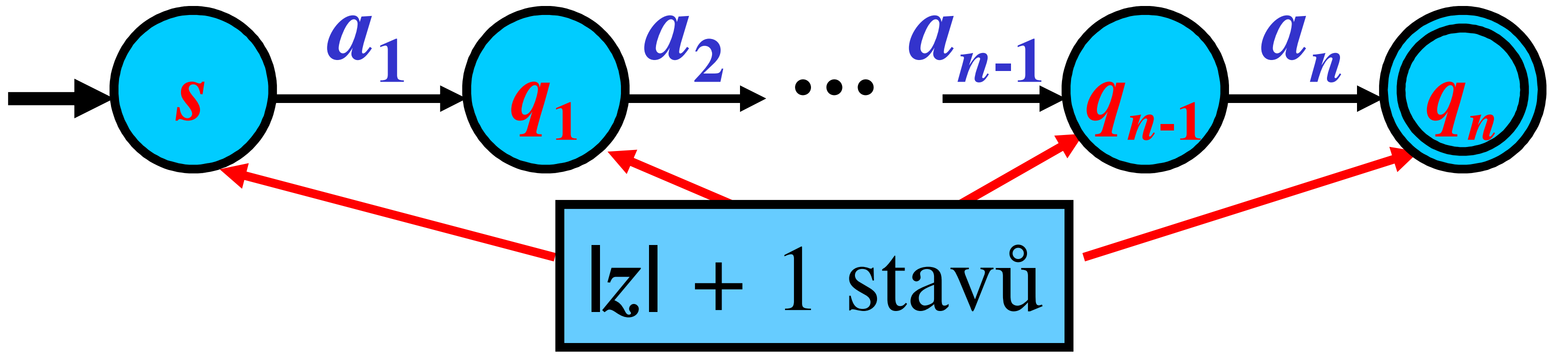
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



Důkaz pumping lemmy 1/3

- Nechť L je libovolný regulární jazyk. Potom existuje **DKA** $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ a $L = L(M)$.
- Pro $z \in L(M)$, M provede $|z|$ přechodů a M navštíví $|z| + 1$ stavů:
- pro $z = a_1a_2 \ldots a_n$:

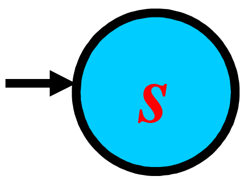


$$s\overbrace{a_1a_2\ldots a_n}^{|z|} \vdash q_1a_2\ldots a_n \vdash \ldots \vdash q_{n-1}a_n \vdash q_n$$

Důkaz pumping lemmy 2/3

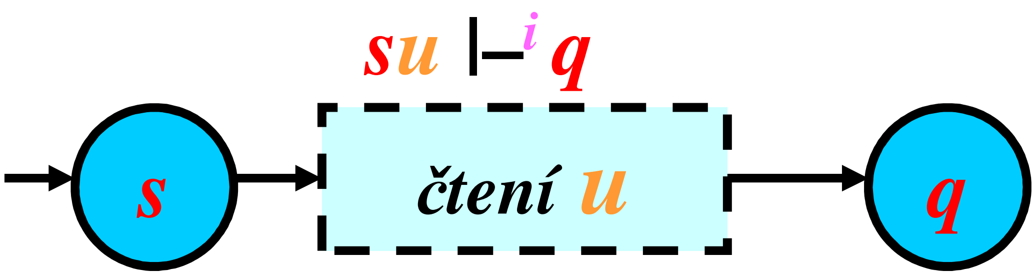
• Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M).
Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně
$k + 1$ stavů. Protože $k + 1 > \text{card}(Q)$, musí
existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.

• Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:



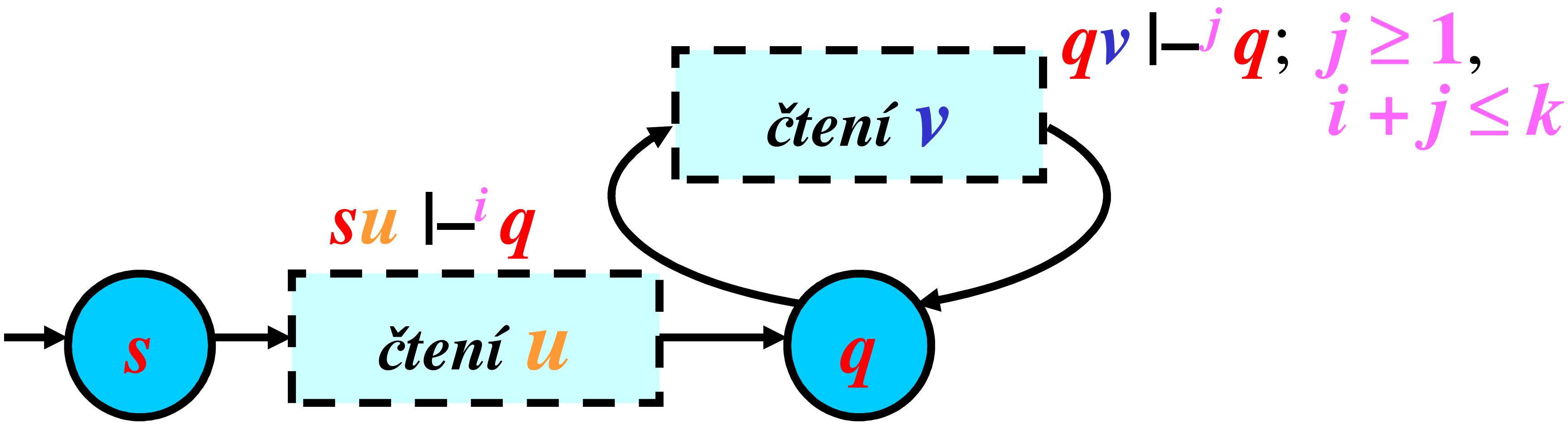
Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M). Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.
- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:



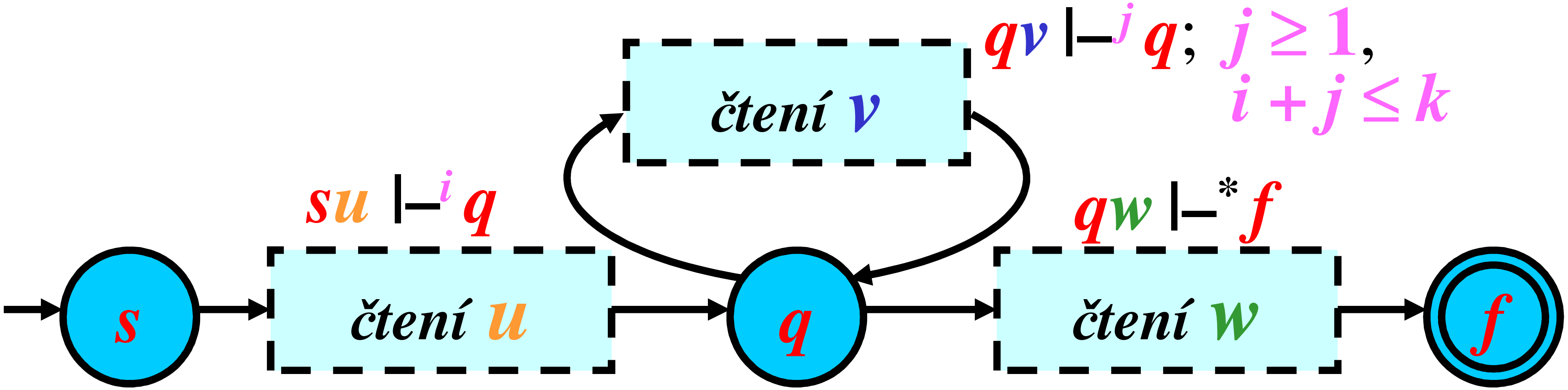
Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M). Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.
- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:



Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M). Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.
- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:

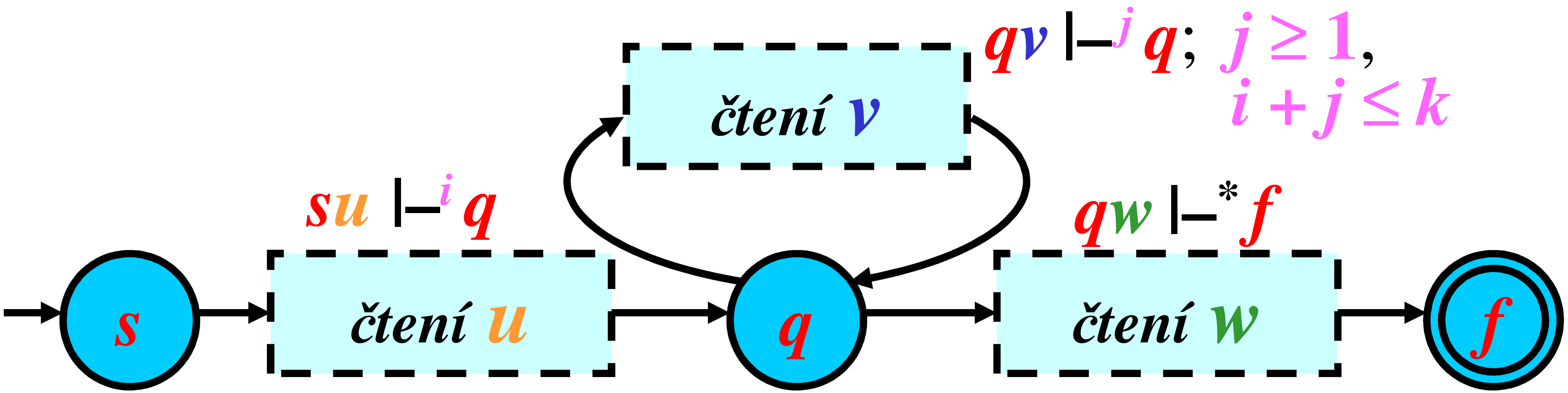


Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k} = \text{card}(Q)$ (celkový počet stavů v M).

Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 > \text{card}(Q)$, musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.

- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:



Celkově:

$$sz = suvw \vdash^i qvw \vdash^j qw \vdash^* f,\ f \in F$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^{\mathbf{0}} w = uw$,

suw

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^{\mathbf{0}} w = uw$,

$suw \vdash^{i} qw$ 1.

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^{m}w = uv^{\mathbf{0}}w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$suv^m w$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^m w \overset{1.}{\vdash^{i}} qv^m w$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^i q$; 2. $qv \vdash^j q$; 3. $qw \vdash^* f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

$$su w \overset{1.}{\vdash^i} qw \overset{3.}{\vdash^*} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^m w \overset{1.}{\vdash^i} qv^m w \overset{2.}{\vdash^j} qv^{m-1} w \overset{2.}{\vdash^j} \dots \overset{2.}{\vdash^j} qw$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^{m}w = uv^{0}w = uw$,

$$su w \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^{m}w \overset{1.}{\vdash^{i}} qv^{m}w \overset{2.}{\vdash^{j}} qv^{m\text{-}1}w \overset{2.}{\vdash^{j}} \ldots \overset{2.}{\vdash^{j}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f, f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^m w \overset{1.}{\vdash^{i}} qv^m w \overset{2.}{\vdash^{j}} qv^{m-1} w \overset{2.}{\vdash^{j}} \dots \overset{2.}{\vdash^{j}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

Celkově:

1) $qv \vdash^{j} q, j \geq 1$; proto $|v| \geq \mathbf{1}$, tedy $v \neq \varepsilon$

2) $suv \vdash^{i} qv \vdash^{j} q, i + j \leq k$; proto $|uv| \leq k$

3) Pro každé $m \geq 0$: $suv^m w \vdash^{*} f,\ f \in F$, proto $uv^m w \in L$

CBD

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

↓

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $z \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|z| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

↓

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $z \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|z| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

↓

Pro <u>všechny</u> dekompozice z na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$ ukážeme:

$\left.\begin{array}{l}\text{existuje } m \geq 0 \text{, pro které } \boldsymbol{uv^mw} \notin \boldsymbol{L}; \\ \text{ale podle PL platí vztah: } \boldsymbol{uv^mw} \in \boldsymbol{L}\end{array}\right\}$ **SPOR**

Pumping lemma: Aplikace I.

• Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $z \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|z| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

Pro <u>všechny</u> dekompozice z na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$ ukážeme:
existuje $m \geq 0$, pro které $\boldsymbol{uv^mw} \notin \boldsymbol{L}$;
ale podle PL platí vztah: $\boldsymbol{uv^mw} \in \boldsymbol{L}$

$\left.\right\}$ **SPOR**

špatný předpoklad

Pumping lemma: Aplikace I.

• Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $z \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|z| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

Pro <u>všechny</u> dekompozice z na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$ ukážeme:

existuje $m \geq 0$, pro které $\boldsymbol{uv^mw} \notin \boldsymbol{L}$;

ale podle PL platí vztah: $\boldsymbol{uv^mw} \in \boldsymbol{L}$

SPOR

špatný předpoklad

Proto

***L* není regulární**

Pumping Lemma: Příklad

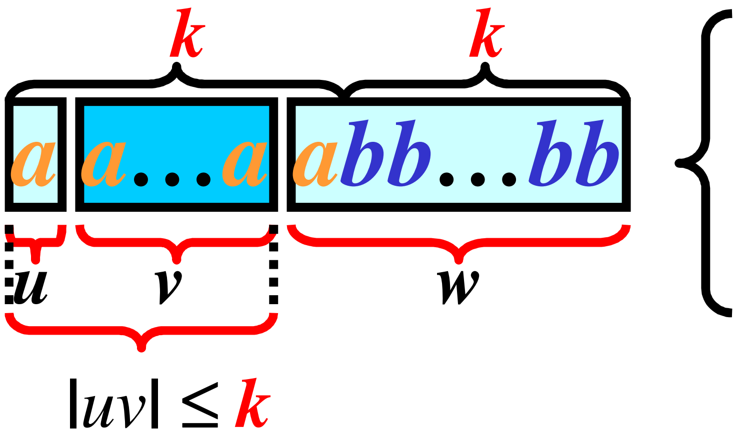
Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

---

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $\boldsymbol{k} \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $z = a^k b^k$: $a^k b^k \in L$, $|z| = |a^k b^k| = 2k \geq k$

3) Všechny dekompozice z na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq \boldsymbol{k}$:



Pumping Lemma: Příklad

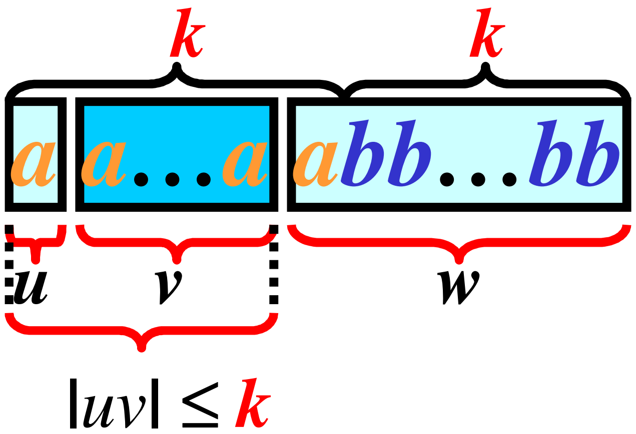
Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

---

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $k \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $z = a^k b^k$: $a^k b^k \in L$, $|z| = |a^k b^k| = 2k \geq k$

3) Všechny dekompozice z na uvw, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$:



- pumping lemma: $uv^0w \in L$

Pumping Lemma: Příklad

Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

---

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $k \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $z = a^k b^k$: $a^k b^k \in L$, $|z| = |a^k b^k| = 2k \geq k$

3) Všechny dekompozice z na uvw, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$:

$$\overbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{u}\;\underbrace{a\ldots a}_{v}}_{|uv| \leq k}\;a}^{k}\overbrace{bb\ldots bb}^{k} \qquad z = \underbrace{a}_{u}\;\underbrace{a\ldots a}_{v}\;\underbrace{abb\ldots bb}_{w}$$

- pumping lemma: $uv^0w \in L$
- $uv^0w = uw = \underbrace{a}_{u}\;\underbrace{abb\ldots bb}_{w} \notin L$, $\quad k - i < k$

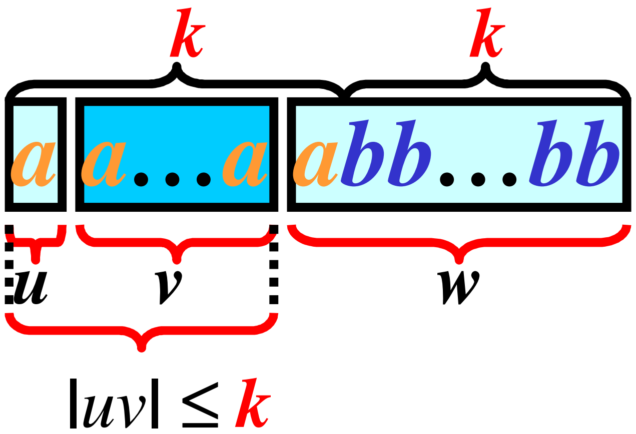
Pumping Lemma: Příklad

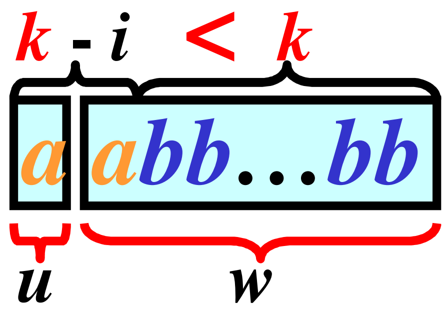
Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $k \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $z = a^k b^k$: $a^k b^k \in L$, $|z| = |a^k b^k| = 2k \geq k$

3) Všechny dekompozice z na uvw, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$:



- pumping lemma: $uv^0w \in L$
- $uv^0w = uw =$  $\notin L$

Spor!

Pumping Lemma: Příklad

Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $k \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $z = a^k b^k$: $a^k b^k \in L$, $|z| = |a^k b^k| = 2k \geq k$

3) Všechny dekompozice z na uvw, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$:

$$\underbrace{\overbrace{\underbrace{a}_{u}\,\underbrace{a\ldots a}_{v}}^{k}}_{|uv| \leq k}\;\underbrace{\overbrace{abb\ldots bb}^{k}}_{w}$$

- pumping lemma: $uv^0w \in L$
- $uv^0w = uw = \underbrace{a}_{u}\,\underbrace{\overbrace{abb\ldots bb}^{k - i \;<\; k}}_{w} \notin L$

Spor!

4) Proto L není regulární jazyk

Poznámka k použití pumping lemmy

- **Pumping lemma:**

pokud $\boxed{L \text{ je regulární}}$ $\xrightarrow{\textbf{potom}}$ $\boxed{\text{existuje } k \geq 1 \text{ a } \ldots}$

Základní aplikace pumping lemmy:

- důkaz sporem, že *L* není regulární jazyk.

- **Ale následující implikace je špatná:**

- **Nelze použít pumping lemmy k dokázání, že daný jazyk *L* je regulární!!**

Poznámka k použití pumping lemmy

- **Pumping lemma:**

pokud L je regulární **potom** $\Rightarrow$ existuje $k \ge 1$ a ...

Základní aplikace pumping lemmy:

- důkaz sporem, že L není regulární jazyk.

- **Ale následující implikace je špatná:**

~~**pokud** existuje $k \ge 1$ a ... **potom** $\Rightarrow$ L je regulární~~

- **Nelze použít pumping lemmy k dokázání, že daný jazyk L je regulární!!**

Pumping lemma: Aplikace II. 1/3

• Pumping lemmu je možné použít k dokazování dalších tvrzení.

Ilustrace:

• Nechť M je DKA a k konstanta z pumping lemmy (k je počet stavů v M). Potom platí:
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Důkaz:

1) existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k \Rightarrow L(M)$ je nekonečný:

Pumping lemma: Aplikace II. 1/3

• Pumping lemmu je možné použít k dokazování dalších tvrzení.

Ilustrace:

• Nechť M je DKA a k konstanta z pumping lemmy (k je počet stavů v M). Potom platí:
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Důkaz:

1) existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k \Rightarrow L(M)$ je nekonečný:

pokud $z \in L(M)$, $k \leq |z|$, potom podle PL:
$z = uvw$, $v \neq \varepsilon$ a dále pro každé $m \geq 0$: $uv^m w \in L(M)$

Pumping lemma: Aplikace II. 1/3

• Pumping lemmu je možné použít k dokazování dalších tvrzení.

Ilustrace:

• Nechť M je DKA a k konstanta z pumping lemmy (k je počet stavů v M). Potom platí:
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Důkaz:

1) existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k \Rightarrow L(M)$ je nekonečný:

pokud $z \in L(M)$, $k \leq |z|$, potom podle PL:

$z = uvw$, $\underbrace{v \neq \varepsilon}$ a dále pro každé $\underbrace{m \geq 0: uv^m w \in L(M)}$

$L(M)$ je nekonečný

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\textbf{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\Downarrow$ **b)**

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- ***L*(*M*) je nekonečný** $\Rightarrow$ **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\textbf{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\Big\downarrow$ **b)**

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- **$L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**

Předpokládme, že **$L(M)$ je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\text{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$ **b)**

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- **$L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**

Předpokládáme, že ***L*(*M*) je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$

pro všechna $z \in L(M)$ platí: $|z| < k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\text{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

b) $\downarrow$

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- ***L*(*M*) je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**

Předpokládáme, že ***L*(*M*) je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$

pro všechna $z \in L(M)$ platí: $|z| < k$

$\downarrow$

***L*(*M*) je konečný**

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\text{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$ **b)**

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- $\boldsymbol{L(M)}$ **je nekonečný** $\boldsymbol{\Rightarrow}$ **existuje** $\boldsymbol{z \in L(M), |z| \geq k}$

Předpokládme, že ***L*(*M*) je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$

pro všechna $z \in L(M)$ platí: $|z| < k$

$\downarrow$

***L*(*M*) je konečný**

Spor!

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$**,** $|z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M)$**,** $k \leq |z| < 2k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

  a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$ **existuje** $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ $\times\times\times\times$ $\longrightarrow$

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ ✕✕✕✕ ⟶

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,

$|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^mw \in L(M)$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

  a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ ✕✕✕✕ →

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$, $|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M), |z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$

a neexistuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$ $\times\times\times\times$ $\longrightarrow$

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M), |z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,
$|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$\downarrow$

pro $m = 0$: $uv^m w = uw \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M), |z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$

a **neexistuje** $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$ ✕✕✕✕ ⟶

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,

$|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k \qquad \text{pro } m = 0\text{: } uv^m w = uw \in L(M)$$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$!

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$ **existuje** $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

a **neexistuje** $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ XXXX →

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,

$|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

↓

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k \qquad \text{pro } m = 0\text{: } uv^m w = uw \in L(M)$$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$!

z_0 **není nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$ **existuje** $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$, $|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

pro $m = 0$: $uv^m w = uw \in L(M)$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$!

z_0 **není nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

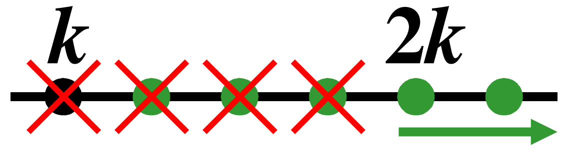
$\boxed{\textbf{SPOR!}}$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M), |z| \geq k \Rightarrow$ **existuje** $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$

Předpokl., že **existuje** $z \in L(M), |z| \geq k$
a neexistuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$



Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M), |z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$, $|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$\downarrow$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

pro $m = 0$: $uv^m w = uw \in L(M)$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$!

z_0 **není nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M), |z_0| \geq k$

$\boxed{\textbf{SPOR!}}$

Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

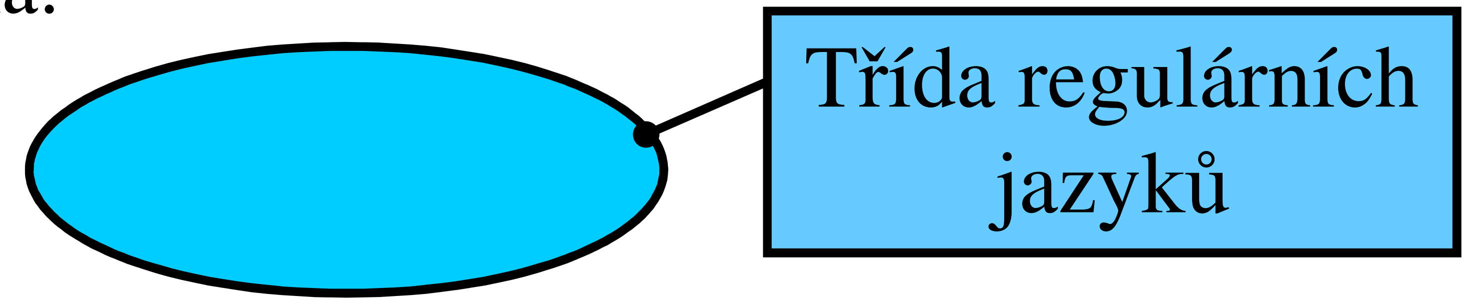
Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

Ilustrace:

- Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči ***sjednocení***.

To znamená:



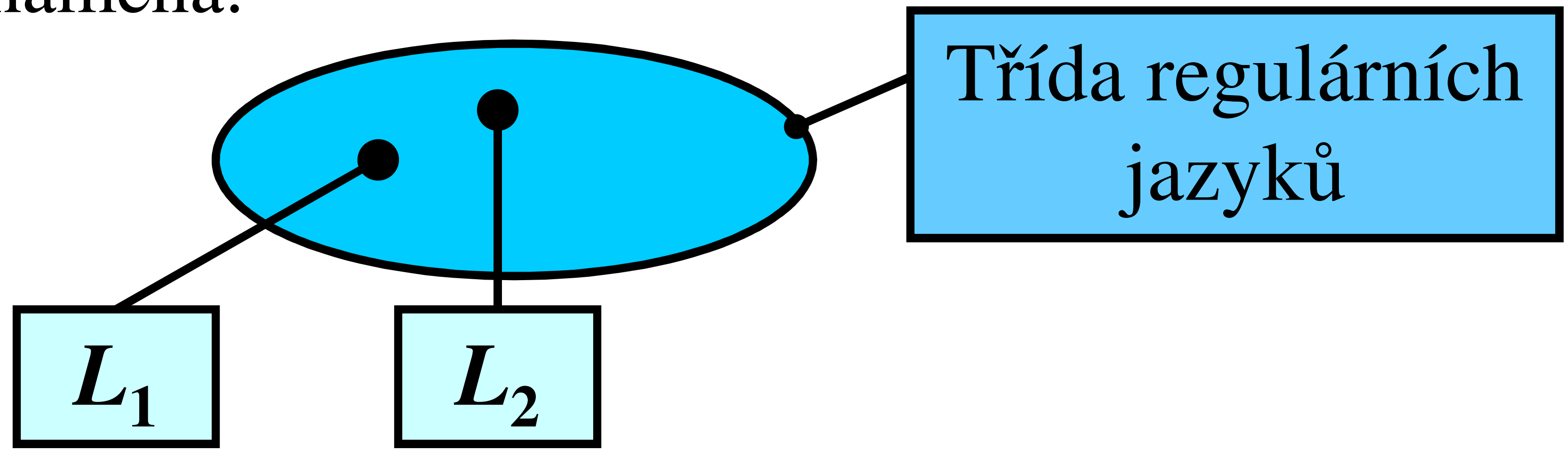
Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

Ilustrace:

• Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči ***sjednocení***.

To znamená:



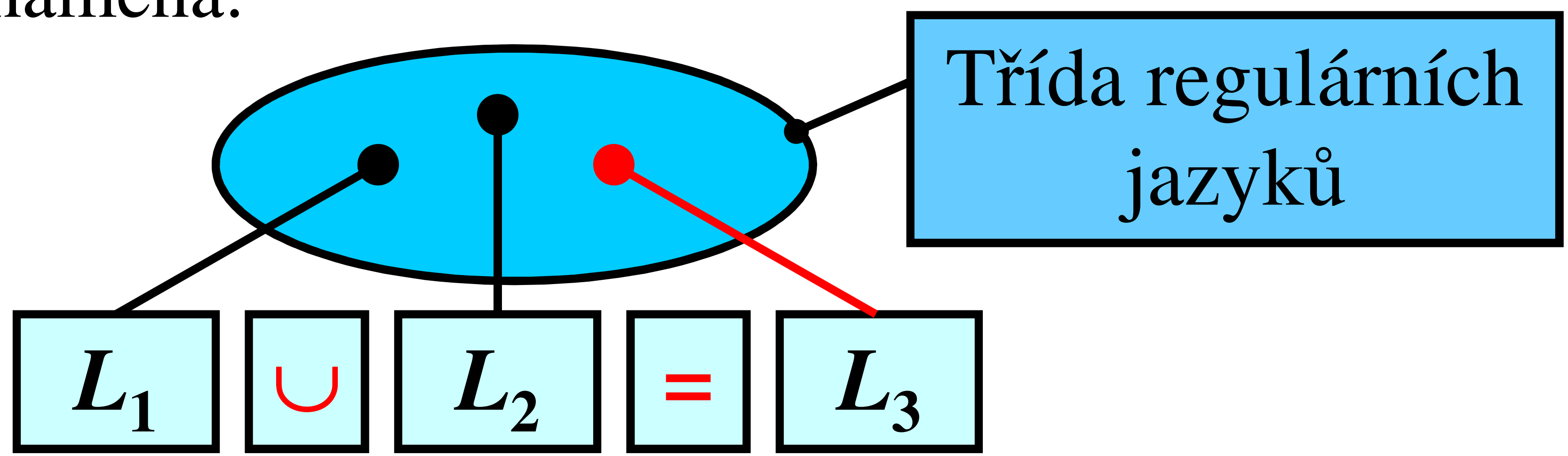
Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

Ilustrace:

- Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči ***sjednocení***.

To znamená:



Uzávěrové vlastnosti 2/2

Tvrzení: Třída regulárních jazyků je uzavřena vůči: **sjednocení**, **konkatenaci**, **iteraci**.

Důkaz:

- Nechť L_1, L_2 jsou dva **regulární jazyky**
- Potom existují dva RV r_1, r_2: $L(r_1) = L_1$, $L(r_2) = L_2$;
- Podle definice regulárních výrazů:
  - $r_1.r_2$ je RV značící $L_1 L_2$
  - $r_1 + r_2$ je RV značící $L_1 \cup L_2$
  - r_1^* je RV značící L_1^*
- Každý RV značí regulární jazyk, tedy

$L_1 L_2$, $L_1 \cup L_2$, L_1^* jsou **regulární jazyky**

Algoritmus: KA pro doplněk

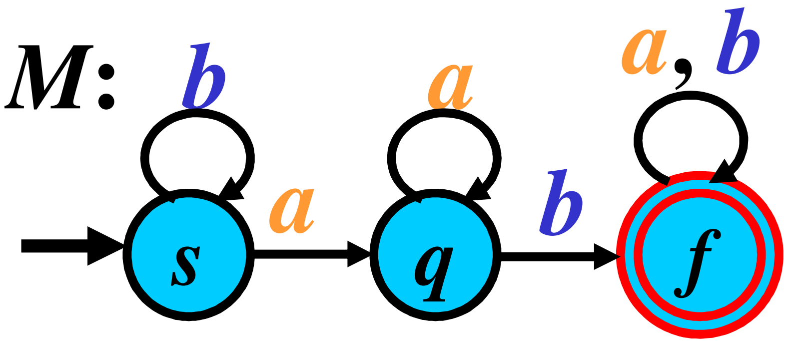
- **Vstup:** Úplný KA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Úplný KA: $M' = (Q, \Sigma, R, s, F')$,

$$L(M') = \overline{L(M)}$$

- **Metoda:**
- $F' := Q - F$

Příklad:

***M*:**



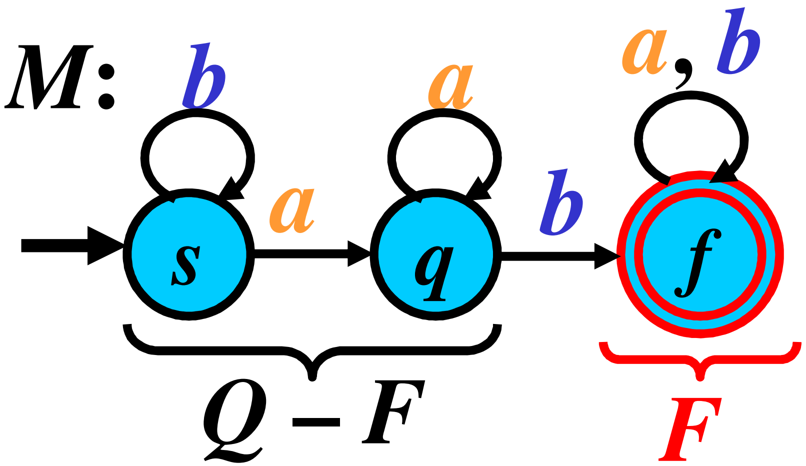
Algoritmus: KA pro doplněk

- **Vstup:** Úplný KA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Úplný KA: $M' = (Q, \Sigma, R, s, F')$,

$$L(M') = \overline{L(M)}$$

- **Metoda:**
- $F' := Q - F$

Příklad:



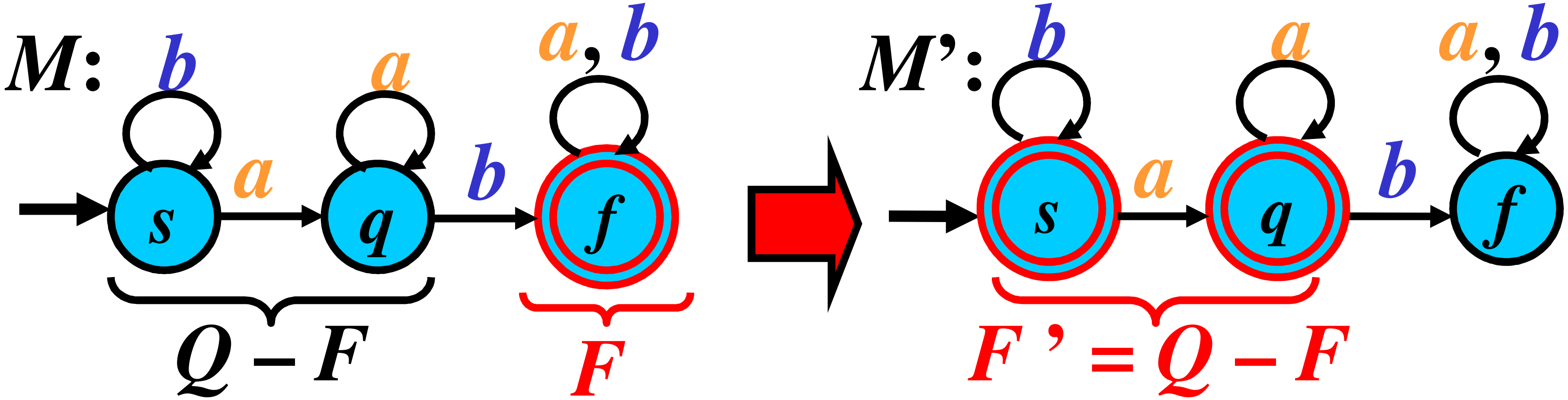
Algoritmus: KA pro doplněk

- **Vstup:** Úplný KA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Úplný KA: $M' = (Q, \Sigma, R, s, F')$,

$$L(M') = \overline{L(M)}$$

- **Metoda:**
- $F' := Q - F$

Příklad:



$L(M) = \{x$: ab je podřetězec $x\}$; $L(M') = \{x$: ab není podřetězec $x\}$

KA pro doplněk: Problém

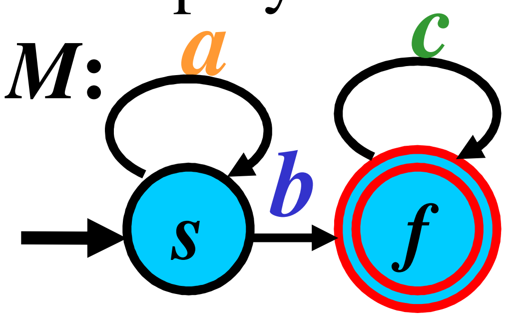
- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud *M* není úplný KA, potom *M* musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

---

Příklad:

Neúplný DKA:

***M*:**



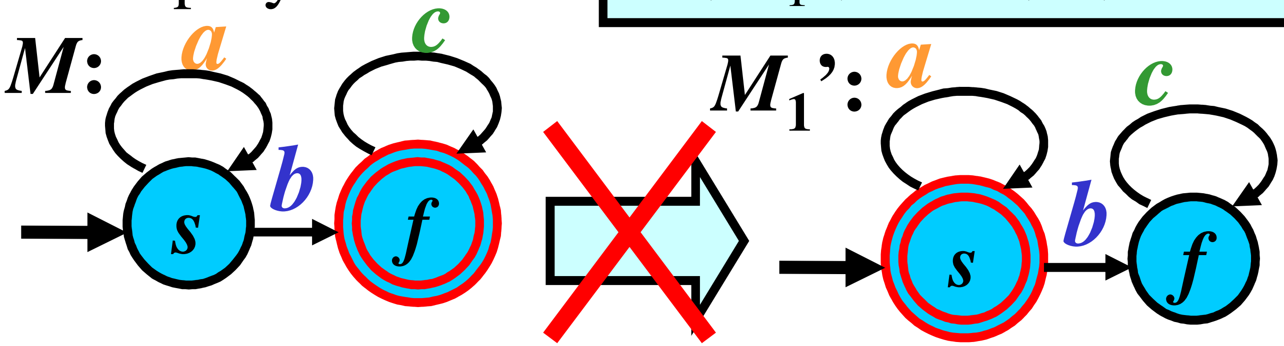
KA pro doplněk: Problém

- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud M není úplný KA, potom M musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

Příklad:

Neúplný DKA:

$L(M_1') \neq \overline{L(M)}$**!** - $c \notin L(M)$, $c \notin L(M_1')$



KA pro doplněk: Problém

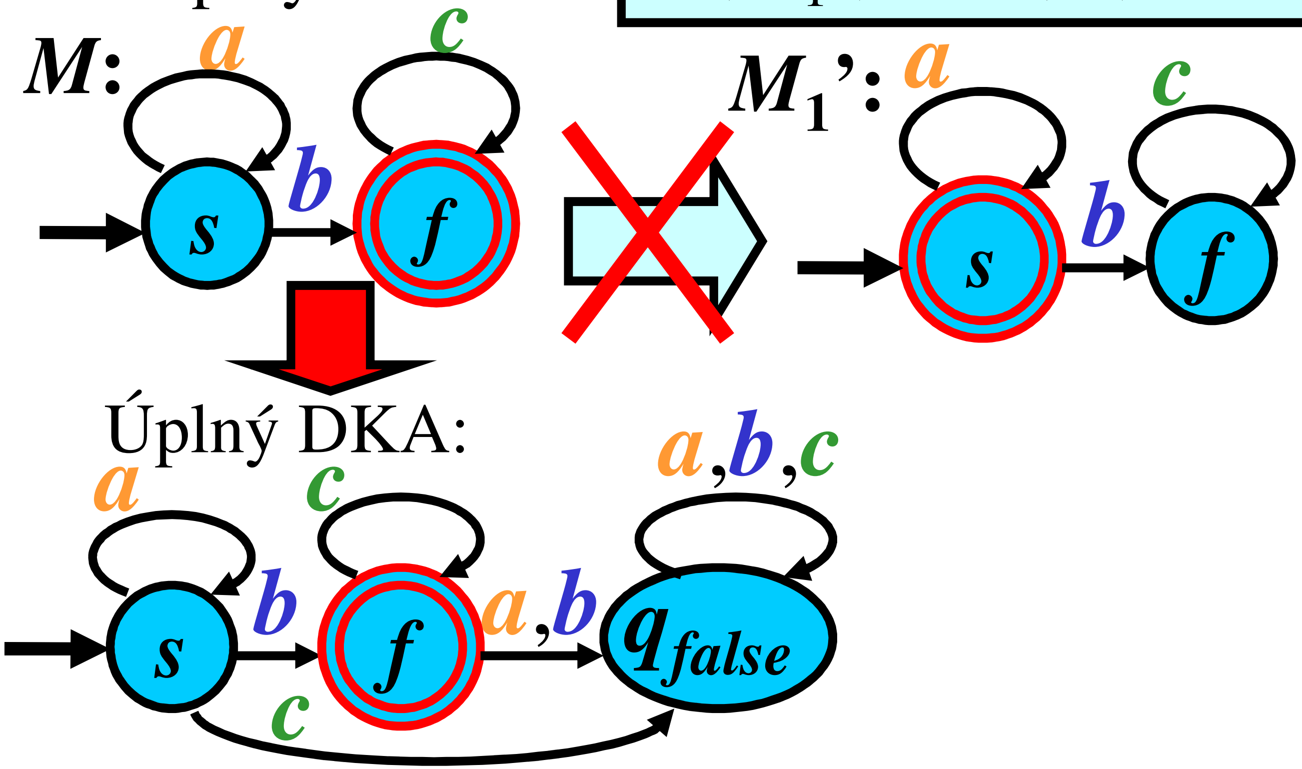
- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud M není úplný KA, potom M musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

---

Příklad:

$L(M_1') \neq \overline{L(M)}$**!** - $c \notin L(M)$, $c \notin L(M_1')$

Neúplný DKA:



KA pro doplněk: Problém

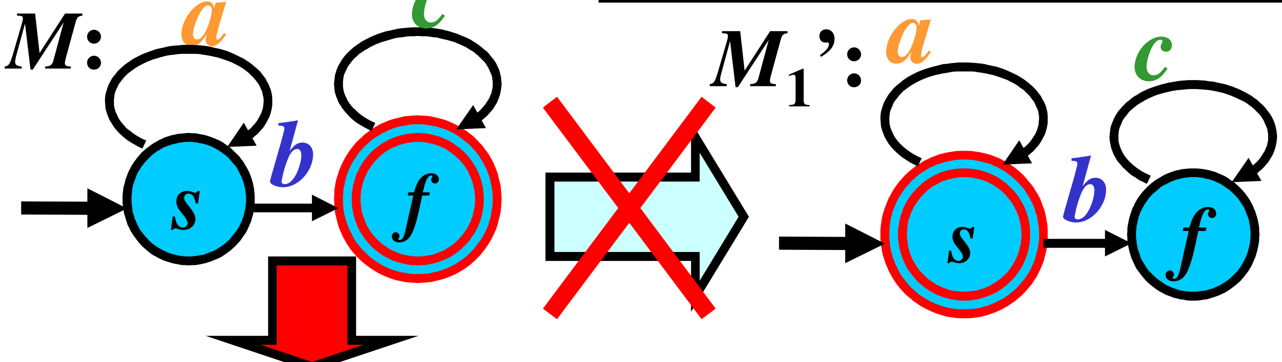
- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud *M* není úplný KA, potom *M* musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

---

Příklad:

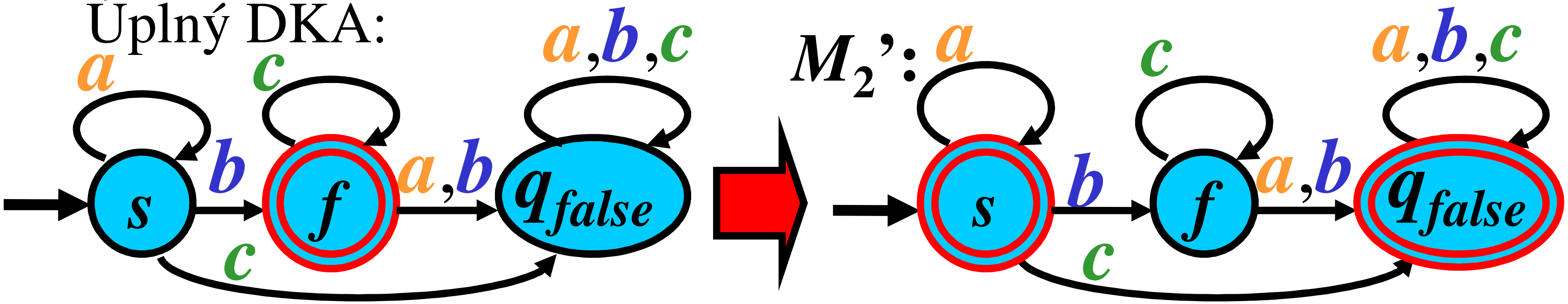
Neúplný DKA:

$L(M_1') \neq \overline{L(M)}$**!** - $c \notin L(M)$, $c \notin L(M_1')$



$L(M_2') = \overline{L(M)}$

Úplný DKA:



Uzávěrové vlastnosti: Doplněk

Tvrzení: Třída regulárních jazyků je uzavřena vůči **doplňku**.

Důkaz:

- Nechť $\boldsymbol{L}$ je **regulární jazyk**
- Pak existuje úplný DKA M: $L(M) = \boldsymbol{L}$
- Můžeme sestrojit úplný DKA M': $L(M') = \overline{\boldsymbol{L}}$ užitím předchozího algoritmu
- Každý KA definuje regulární jazyk, tedy $\overline{\boldsymbol{L}}$ je **regulární jazyk**

Uzávěrové vlastnosti: Průnik

Tvrzení: Třída regulárních jazyků je uzavřena vůči **průniku**.

Důkaz:

- Nechť L_1, L_2 jsou dva **regulární jazyky**
- $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ jsou **regulární jazyky**

(třída regulárních jazyků je uzavřena vůči doplňku)

- $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ je **regulární jazyk**

(třída regulárních jazyků je uzavřena vůči sjednocení)

- $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ je **regulární jazyk**

(třída regulárních jazyků je uzavřena vůči doplňku)

- $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ je **regulární jazyk**

(De-Morganovy zákony)

Boolova algebra jazyků

Definice: Nechť je třída jazyků uzavřena vůči sjednocení, průniku a doplňku. Potom tato třída tvoří ***Boolovu algebru jazyků***.

Tvrzení: Třída regulárních jazyků tvoří Booleovu algebru jazyků.

Důkaz:

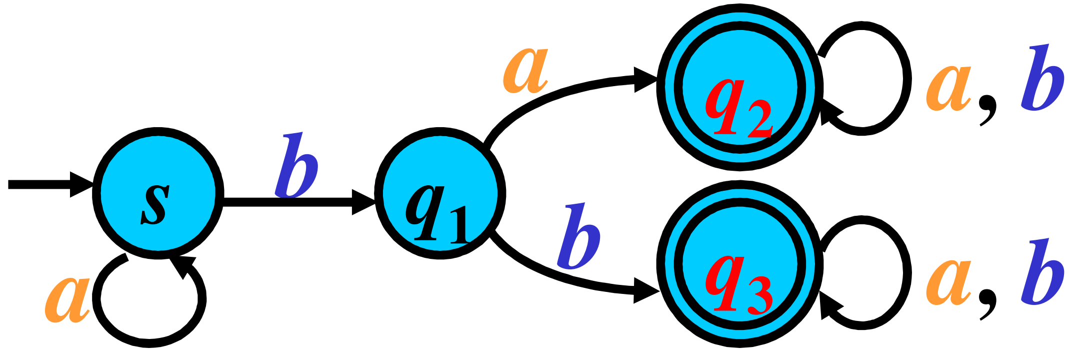
- Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči sjednocení, průniku a doplňku.

Minimalizace: Rozlišitelné stavy

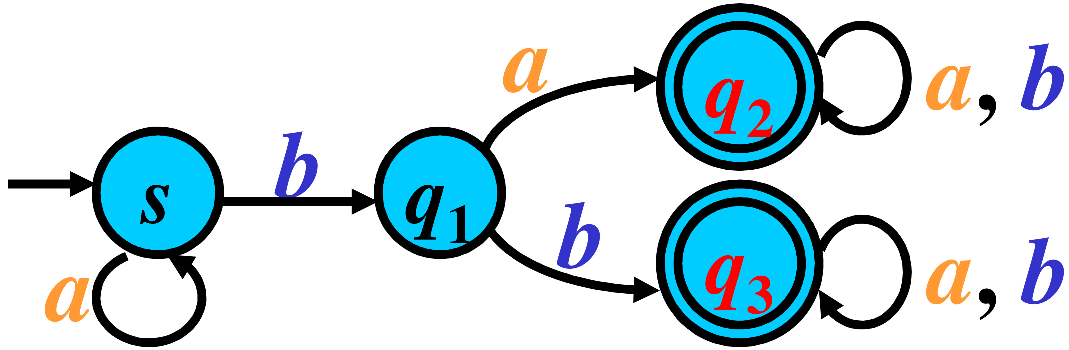
Myšlenka: Řetězec *w rozlišuje* stavy *p* a *q*, pokud se DSKA „dostane“ z <u>právě z jedné</u> z konfigurací *pw* a *qw* do koncového stavu.

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je DSKA a nechť $p, q \in Q$, $p \neq q$. Stavy p a q jsou *rozlišitelné* pokud existuje řetězec $w \in \Sigma^*$ takový, že:
$pw \vdash^* p'$ and $qw \vdash^* q'$, kde $p', q' \in Q$ a
$((p' \in F$ a $q' \notin F)$ nebo $(p' \notin F$ a $q' \in F))$.
Jinak stavy p a q jsou *nerozlišitelné*.

Rozlišitelné stavy: Příklad



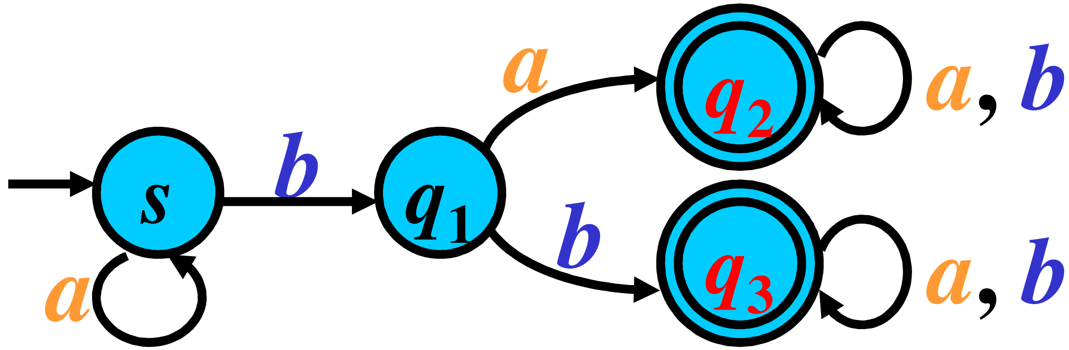
Rozlišitelné stavy: Příklad



- s a q_1 jsou **rozlišitelné**, protože např. pro $w = a$:

$$sa \vdash s\ ,\ s \notin F$$
$$q_1 a \vdash q_2\ ,\ q_2 \in F$$

Rozlišitelné stavy: Příklad



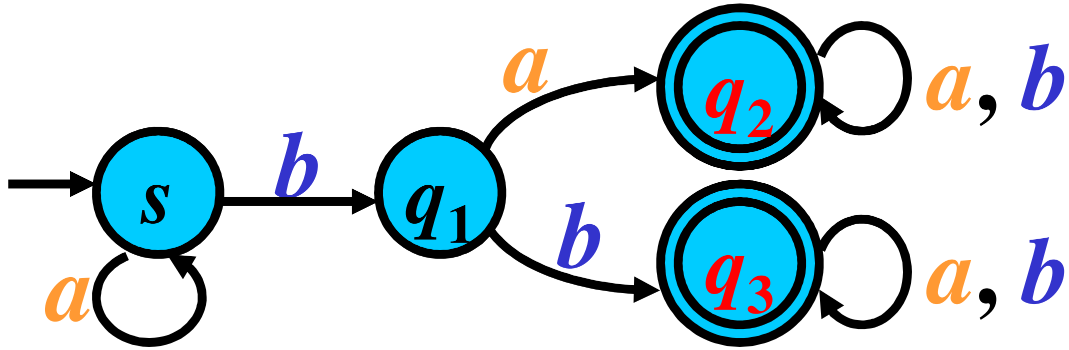
- s a q_1 jsou **rozlišitelné**, protože např. pro $w = a$:

$$sa \vdash s\ ,\ s \notin F$$
$$q_1a \vdash q_2\ ,\ q_2 \in F$$

- q_2 a q_3 jsou **nerozlišitelné**, protože pro každé $w \in \Sigma^*$:

$$q_2w \vdash^* q_2,\ q_2 \in F$$
$$q_3w \vdash^* q_3,\ q_3 \in F$$

Rozlišitelné stavy: Příklad



- s a q_1 jsou **rozlišitelné**, protože např. pro $w = a$:

$$sa \vdash s\ ,\ s \notin F$$
$$q_1 a \vdash q_2\ ,\ q_2 \in F$$

- q_2 a q_3 jsou **nerozlišitelné**, protože pro každé $w \in \Sigma^*$:

$$q_2 w \vdash^* q_2,\ q_2 \in F$$
$$q_3 w \vdash^* q_3,\ q_3 \in F$$

- Ostatní dvojice stavů jsou triviálně **rozlišitelné** pro $w = \varepsilon$.

Minimální KA

Definice: Nechť M je **DSKA**. Potom, M je ***minimální KA***, pokud M obsahuje pouze rozlišitelné stavy.

Tvrzení: Pro každý DSKA M, existuje ekvivalentní minimální KA M_m.

Důkaz: Použij následující algoritmus.

Algoritmus: Minimalizace KA

- **Vstup:** DSKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Minimální KA $M_m = (Q_m, \Sigma, R_m, s_m, F_m)$

- **Metoda:**
- $Q_m = \{\{p: p \in F\}, \{q: q \in Q - F\}\}$;
- **repeat**

  if existuje $X \in Q_m$, $d \in \Sigma$, $X_1, X_2 \subset X$ takové, že:

  $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ **and**

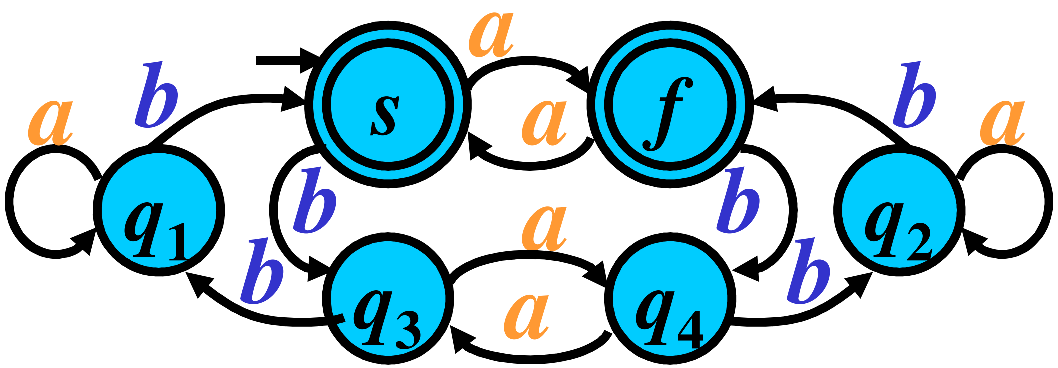
  $\{q_1: p_1 \in X_1, p_1 d \rightarrow q_1 \in R\} \subseteq Q_1, Q_1 \in Q_m,$

  $\{q_2: p_2 \in X_2, p_2 d \rightarrow q_2 \in R\} \cap Q_1 = \varnothing$

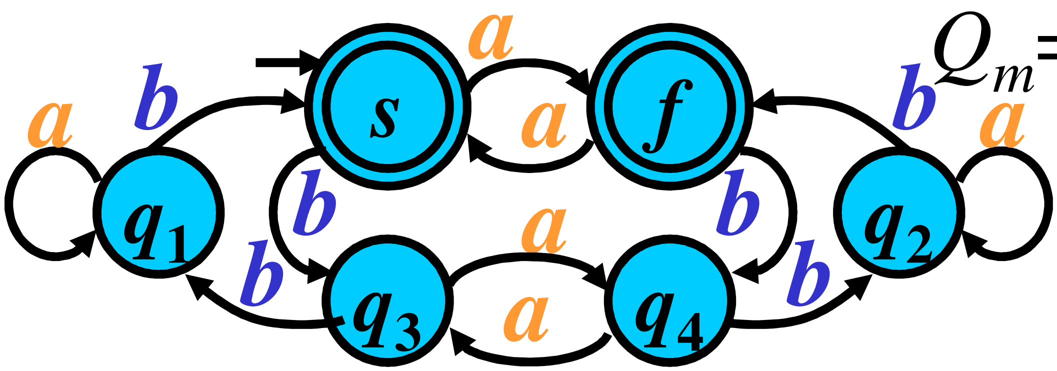
  then rozštěp X na X_1 a X_2 v Q_m

  until není možné provést další štěpení;
- $R_m = \{ Xa \rightarrow Y: X, Y \in Q_m, pa \rightarrow q \in R, p \in X, q \in Y, a \in \Sigma\}$;
- $s_m = X: s \in X$; $F_m := \{X: X \in Q_m, X \cap F \neq \varnothing\}$.

Minimalizace: Příklad 1/4

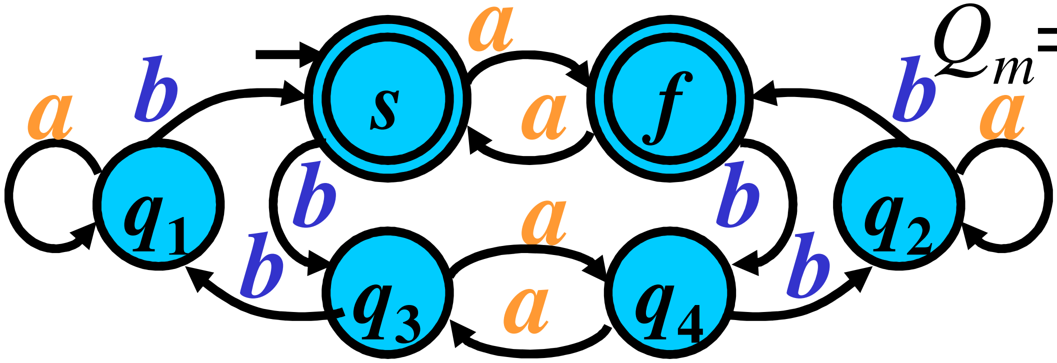


Minimalizace: Příklad 1/4



$$Q_m = \{\underbrace{\{s, f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$$

Minimalizace: Příklad 1/4



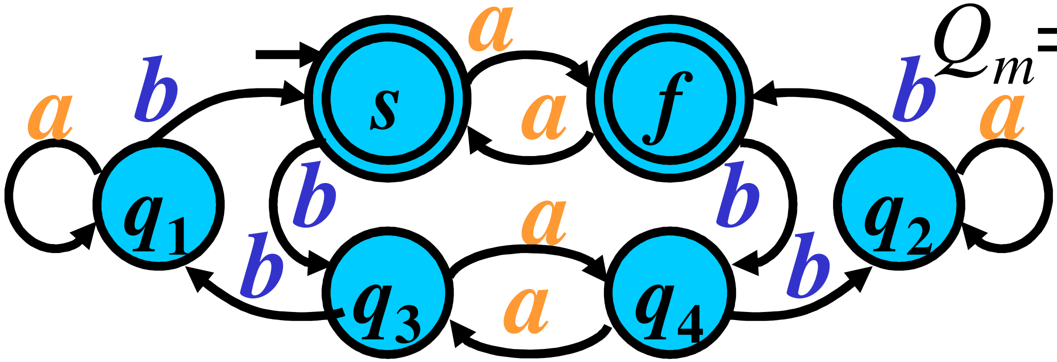
$Q_m = \{\underbrace{\{s, f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$

1) $X = \{s, f\}$**:**

$d = a$**:** $sa \rightarrow f$

$fa \rightarrow s$

Minimalizace: Příklad 1/4



$$Q_m = \{\underbrace{\{s, f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$$

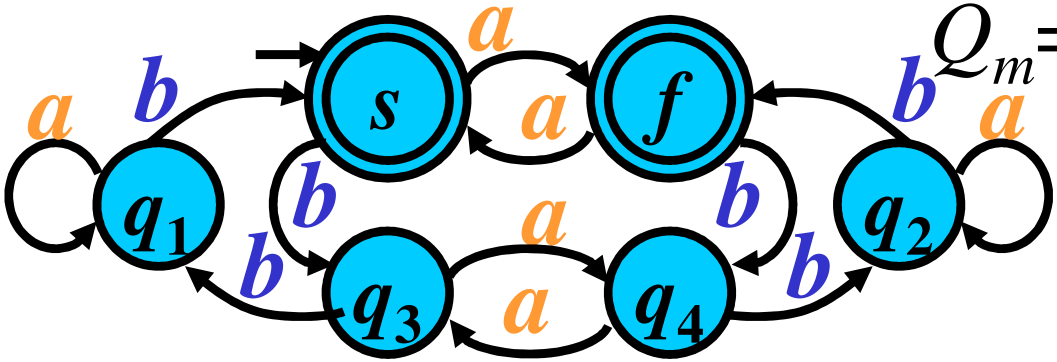
---

1) $X = \{s, f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ $\boxed{f, s}$

Minimalizace: Příklad 1/4



$Q_m = \{\underbrace{\{s,f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1,q_2,q_3,q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$

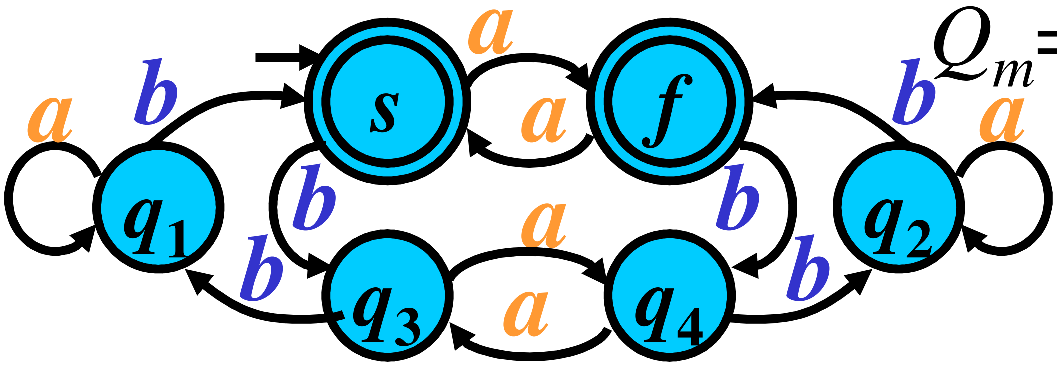
---

1) $X = \{s,f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $\begin{array}{l} sa \to \\ fa \to \end{array} \boxed{\begin{array}{c} f \\ s \end{array}}$ $\quad d = b$: $\begin{array}{l} sb \to q_3 \\ fb \to q_4 \end{array}$

Minimalizace: Příklad 1/4



$Q_m = \{\underbrace{\{s, f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$

1) $X = \{s, f\}$:

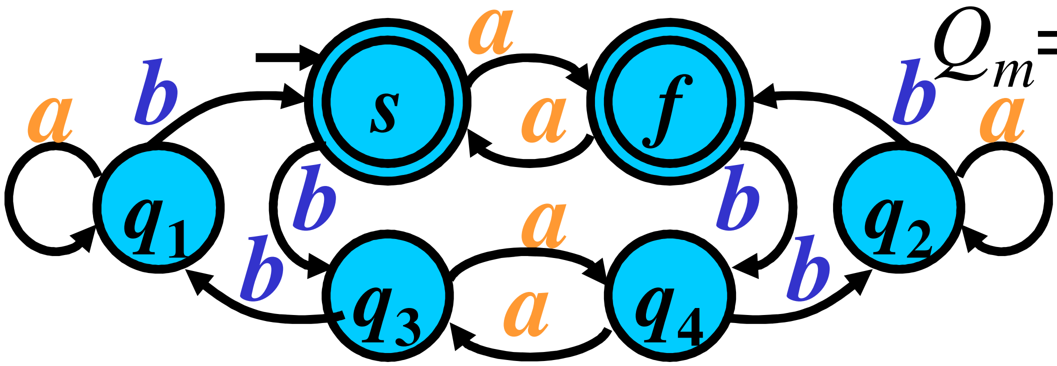
Z jedné množiny

$d = a$: $\begin{array}{l} sa \rightarrow \\ fa \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} f \\ s \end{array}}$

Z jedné množiny

$d = b$: $\begin{array}{l} sb \rightarrow \\ fb \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} q_3 \\ q_4 \end{array}}$

Minimalizace: Příklad 1/4



$$Q_m = \{\underbrace{\{s,f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1,q_2,q_3,q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$$

1) $X = \{s,f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

2) $X = \{q_1,q_2,q_3,q_4\}$:

$d = a$:

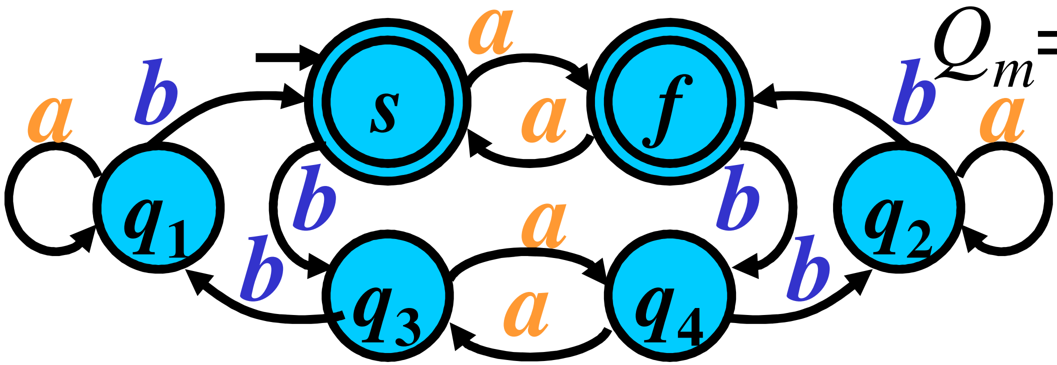
$q_1a \rightarrow q_1$

$q_2a \rightarrow q_2$

$q_3a \rightarrow q_4$

$q_4a \rightarrow q_3$

Minimalizace: Příklad 1/4



$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2,q_3,q_4\}\}$

Koncové stavy

Ostatní stavy

1) $X = \{s,f\}$:

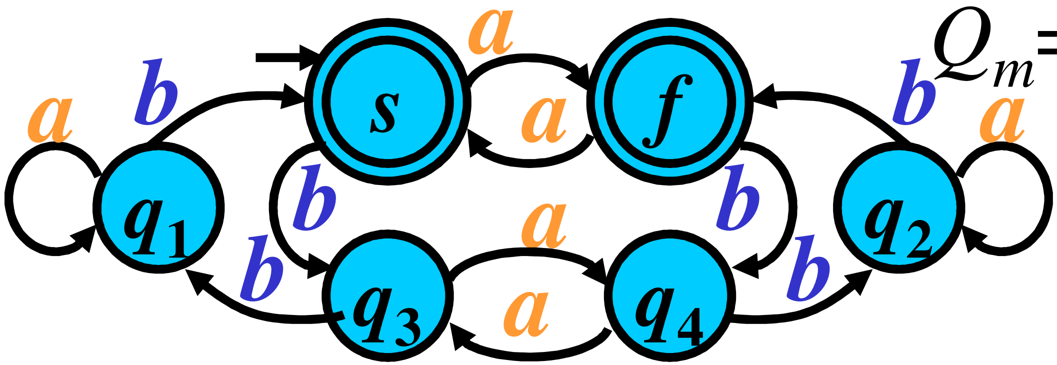
$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ — Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$ — Z jedné množiny

2) $X = \{q_1,q_2,q_3,q_4\}$:

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$, $q_3a \rightarrow q_4$, $q_4a \rightarrow q_3$ — Z jedné množiny

Minimalizace: Příklad 1/4



$Q_m = \{\underbrace{\{s,f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1,q_2,q_3,q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$

1) $X = \{s,f\}$:

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ — Z jedné množiny

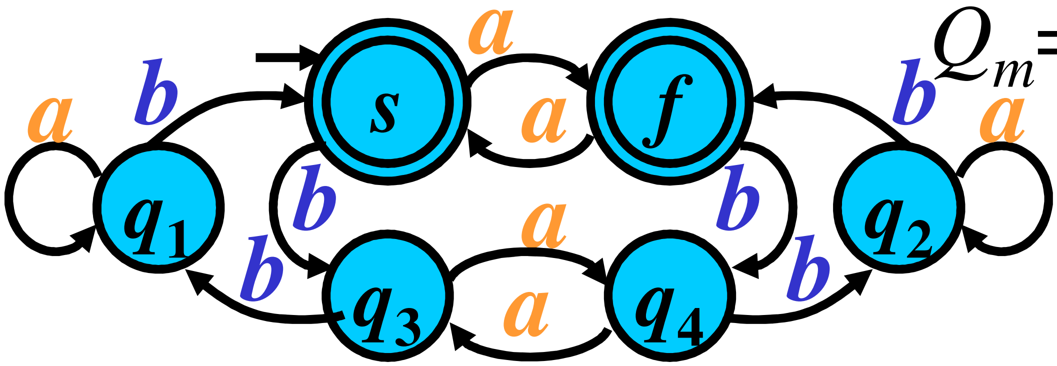
$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$ — Z jedné množiny

2) $X = \{q_1,q_2,q_3,q_4\}$:

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$, $q_3a \rightarrow q_4$, $q_4a \rightarrow q_3$ — Z jedné množiny

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$, $q_3b \rightarrow q_1$, $q_4b \rightarrow q_2$

Minimalizace: Příklad 1/4



$$Q_m = \{\underbrace{\{s, f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$$

1) $X = \{s, f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \to f$, $fa \to s$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \to q_3$, $fb \to q_4$

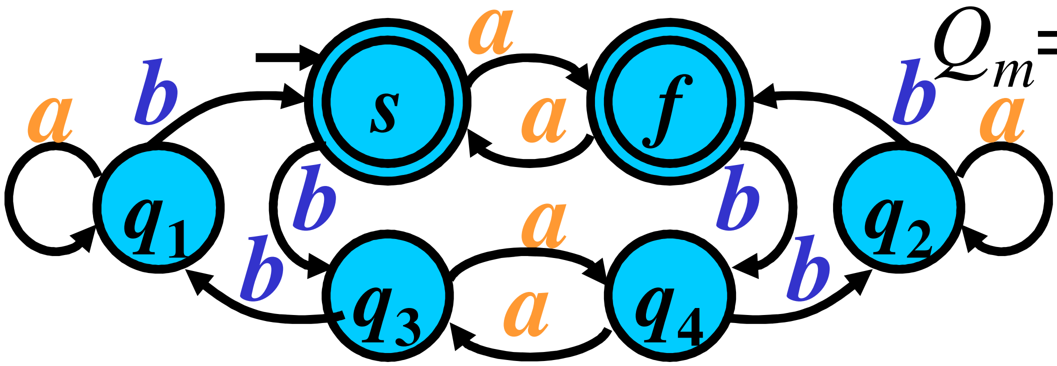
2) $X = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $q_1a \to q_1$, $q_2a \to q_2$, $q_3a \to q_4$, $q_4a \to q_3$

$d = b$: $q_1b \to s$, $q_2b \to f$ $\subseteq Q_1 = \{s, f\}$, $q_3b \to q_1$, $q_4b \to q_2$

Minimalizace: Příklad 1/4



$Q_m = \{\underbrace{\{s, f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$

1) $X = \{s, f\}$:

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ — Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$ — Z jedné množiny

2) $X = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$:

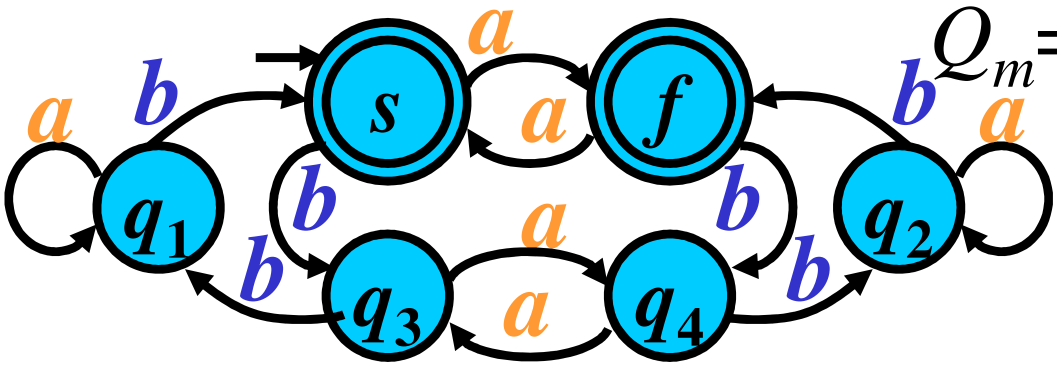
$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$, $q_3a \rightarrow q_4$, $q_4a \rightarrow q_3$ — Z jedné množiny

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$, $q_3b \rightarrow q_1$, $q_4b \rightarrow q_2$

$\subseteq Q_1 = \{s, f\}$

$\{q_1, q_2\} \cap Q_1 = \emptyset$

Minimalizace: Příklad 1/4



$$Q_m = \{\underbrace{\{s,f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1,q_2,q_3,q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$$

---

1) $X = \{s,f\}$:

Z jedné množiny **Z jedné množiny**

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

---

2) $X = \{q_1,q_2,q_3,q_4\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$, $q_3a \rightarrow q_4$, $q_4a \rightarrow q_3$

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$; $\{s, f\} \subseteq Q_1 = \{s, f\}$

$q_3b \rightarrow q_1$, $q_4b \rightarrow q_2$; $\{q_1,q_2\} \cap Q_1 = \emptyset$

Štěpení: $\{q_1,q_2,q_3,q_4\} \Rightarrow \underbrace{\{q_1,q_2\}}_{X_1}, \underbrace{\{q_3,q_4\}}_{X_2}$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{\boldsymbol{s},\boldsymbol{f}\}, \{\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{q_2}\}, \{\boldsymbol{q_3},\boldsymbol{q_4}\}\}$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

---

1) $X = \{s,f\}$:

$d = a$: $sa \rightarrow f$
$fa \rightarrow s$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

---

1) $X = \{s,f\}$**:**

Z jedné množiny

$d = a$**:** $sa \rightarrow f$
$fa \rightarrow s$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

---

1) $X = \{s,f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

1) $X = \{s,f\}$**:**

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

---

1) $X = \{s,f\}$**:**

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

---

2) $X = \{q_1,q_2\}$**:**

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}\}$

1) $X = \{s, f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$; $\boxed{\begin{matrix} f \\ s \end{matrix}}$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$; $\boxed{\begin{matrix} q_3 \\ q_4 \end{matrix}}$

2) $X = \{q_1, q_2\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$; $\boxed{\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}}$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

1) $X = \{s,f\}$**:**

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

2) $X = \{q_1,q_2\}$**:**

Z jedné množiny

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

---

1) $X = \{s,f\}$:

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ — **Z jedné množiny**

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$ — **Z jedné množiny**

---

2) $X = \{q_1,q_2\}$:

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$ — **Z jedné množiny**

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$ — **Z jedné množiny**

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

1) $X = \{s,f\}$**:**

$d = a$**:** $sa \to f$, $fa \to s$ — **Z jedné množiny**

$d = b$**:** $sb \to q_3$, $fb \to q_4$ — **Z jedné množiny**

2) $X = \{q_1,q_2\}$**:**

$d = a$**:** $q_1a \to q_1$, $q_2a \to q_2$ — **Z jedné množiny**

$d = b$**:** $q_1b \to s$, $q_2b \to f$ — **Z jedné množiny**

3) $X = \{q_3,q_4\}$**:**

$d = a$**:** $q_3a \to q_3$, $q_4a \to q_4$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}\}$

1) $X = \{s, f\}$**:**

$d = a$**:** $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ — **Z jedné množiny**

$d = b$**:** $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$ — **Z jedné množiny**

2) $X = \{q_1, q_2\}$**:**

$d = a$**:** $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$ — **Z jedné množiny**

$d = b$**:** $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$ — **Z jedné množiny**

3) $X = \{q_3, q_4\}$**:**

$d = a$**:** $q_3a \rightarrow q_3$, $q_4a \rightarrow q_4$ — **Z jedné množiny**

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}\}$

1) $X = \{s, f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

2) $X = \{q_1, q_2\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$

Z jedné množiny

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$

3) $X = \{q_3, q_4\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $q_3a \rightarrow q_3$, $q_4a \rightarrow q_4$

$d = b$: $q_3b \rightarrow q_1$, $q_4b \rightarrow q_2$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}\}$

1) $X = \{s, f\}$:

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ — **Z jedné množiny**

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$ — **Z jedné množiny**

2) $X = \{q_1, q_2\}$:

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$ — **Z jedné množiny**

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$ — **Z jedné množiny**

3) $X = \{q_3, q_4\}$:

$d = a$: $q_3a \rightarrow q_3$, $q_4a \rightarrow q_4$ — **Z jedné množiny**

$d = b$: $q_3b \rightarrow q_1$, $q_4b \rightarrow q_2$ — **Z jedné množiny**

Žádné další štěpení !!!

Minimalizace: Příklad 3/4

$Q_m = \{\{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}\}$

$$\left.\begin{array}{l} sa \to f \in R: \\ fa \to s \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{s, f\}a \to \{s, f\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} sb \to q_3 \in R: \\ fb \to q_4 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{s, f\}b \to \{q_3, q_4\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_1a \to q_1 \in R: \\ q_2a \to q_2 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_1, q_2\}a \to \{q_1, q_2\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_1b \to s \in R: \\ q_2b \to f \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_1, q_2\}b \to \{s, f\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_3a \to q_3 \in R: \\ q_4a \to q_4 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_3, q_4\}a \to \{q_3, q_4\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_3b \to q_1 \in R: \\ q_4b \to q_2 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_3, q_4\}b \to \{q_1, q_2\} \in R_m$$

Minimalizace: Příklad 4/4

$s \in \{s,f\} \Rightarrow s_m := \{s,f\}$

$\left.\begin{array}{l} s \in F: \\ f \in F: \end{array}\right\} \Rightarrow \{s,f\} \in F_m$

$M_m = (Q_m, \Sigma, R_m, s_m, F_m)$, kde: $\Sigma = \{a, b\}$, $s_m = \{s,f\}$

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$, $F_m = \{\{s,f\}\}$

$R_m = \{\{s,f\}a \rightarrow \{s,f\}, \{s,f\}b \rightarrow \{q_3,q_4\}, \{q_1,q_2\}a \rightarrow \{q_1,q_2\},$
$\{q_1,q_2\}b \rightarrow \{s,f\}, \{q_3,q_4\}a \rightarrow \{q_3,q_4\}, \{q_3,q_4\}b \rightarrow \{q_1,q_2\}\}$

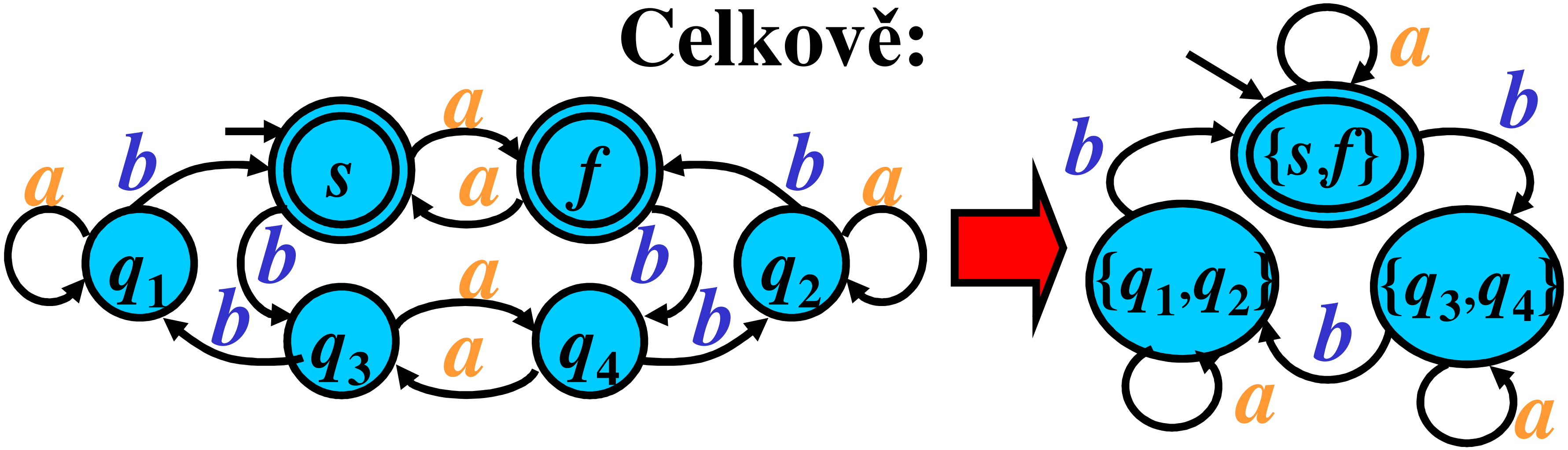
Minimalizace: Příklad 4/4

$s \in \{s, f\} \Rightarrow s_m := \{s, f\}$

$\left.\begin{array}{l} s \in F: \\ f \in F: \end{array}\right\} \Rightarrow \{s, f\} \in F_m$

$M_m = (Q_m, \Sigma, R_m, s_m, F_m)$, kde: $\Sigma = \{a, b\}$, $s_m = \{s, f\}$
$Q_m = \{\{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}\}$, $F_m = \{\{s, f\}\}$
$R_m = \{\{s, f\}a \rightarrow \{s, f\}, \{s, f\}b \rightarrow \{q_3, q_4\}, \{q_1, q_2\}a \rightarrow \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_2\}b \rightarrow \{s, f\}, \{q_3, q_4\}a \rightarrow \{q_3, q_4\}, \{q_3, q_4\}b \rightarrow \{q_1, q_2\}\}$

Celkově:



Typy KA: Shrnutí

	KA	KA bez ε-přech.	DKA	Úplný KA	DSKA	Minimální KA
Počet všech pravidel tvaru $p \to q$, kde $p, q \in Q$	**0-n**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Počet pravidel tvaru $pa \to q$, pro libovolné $p \in Q$ a libovolné $a \in \Sigma$	**0-n**	**0-n**	**0-1**	**1**	**1**	**1**
Počet všech nedostupných stavů	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0**	**0**
Počet všech neukončujících stavů	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0-1**	**0-1**
Počet všech možných těchto automatů pro jeden regulární jazyk	∞	∞	∞	∞	∞	**1**

Hlavní rozhodnutelné problémy

1. Problém členství:

- **Instance:** FA M, $w \in \Sigma^*$; **Otázka:** $w \in L(M)$?

2. Problém prázdnosti:

- **Instance:** FA M; **Otázka:** $L(M) = \emptyset$?

3. Problém konečnosti:

- **Instance:** FA M; **Otázka:** Je $L(M)$ konečný?

4. Problém ekvivalence:

- **Instance:** FA M_1, M_2; **Otázka:** $L(M_1) = L(M_2)$?

Algoritmus: Problém členství

- **Vstup:** DKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$; $w \in \Sigma^*$
- **Výstup: ANO**, pokud $w \in L(M)$

  NE, pokud $w \notin L(M)$

- **Metoda:**
- **if** $sw \vdash^* f,\ f \in F$ **then** napiš('**ANO**')

  else napiš('**NE**')

Celkově:

Problém členství je pro KA rozhodnutelný

Algoritmus: Problém prázdnosti

- **Vstup:** KA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$;
- **Výstup:** **ANO**, pokud $L(M) = \emptyset$
  NE, pokud $L(M) \neq \emptyset$

- **Metoda:**
- **if** s je neukončující **then** napiš('**ANO**')
  else napiš('**NE**')

Celkově:

Problém prázdnosti je pro KA rozhodnutelný

Algoritmus: Problém konečnosti

- **Vstup:** DKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$;
- **Výstup:** **ANO**, pokud $L(M)$ je konečný
  NE, pokud $L(M)$ je nekonečný

- **Metoda:**
- Nechť $k = \mathrm{card}(Q)$
- **if** existuje $z \in L(M)$, $k \le |z| < 2k$ **then** napiš('**NE**')
  else napiš('**ANO**')

Pozn.: Tento algoritmus je založen na tvrzení:

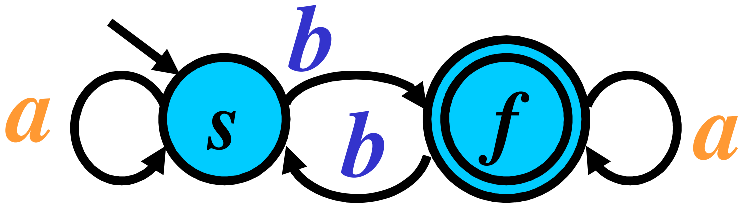
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje z: $z \in L(M)$, $k \le |z| < 2k$

Celkově:

Problém konečnosti je pro KA rozhodnutelný

Rozhodnutelné problémy: Příklad

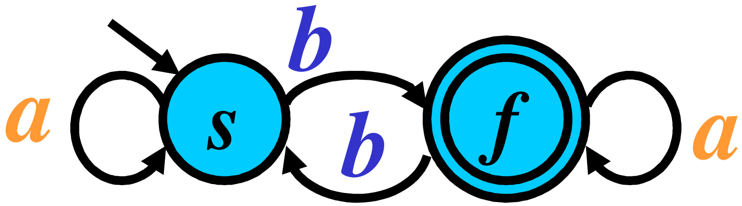
M:



Otázka: $ab \in L(M)$?

Rozhodnutelné problémy: Příklad

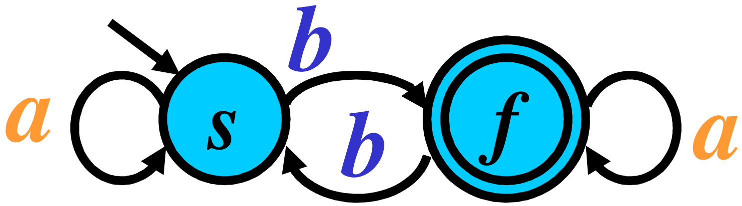
M:



Otázka: $ab \in L(M)$?

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M: 

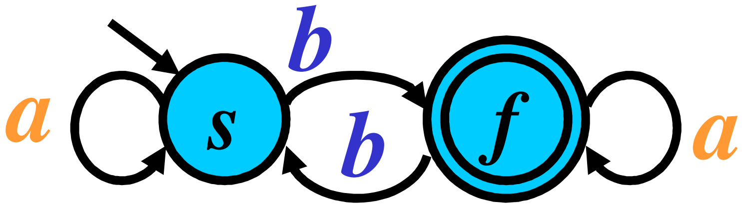
Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

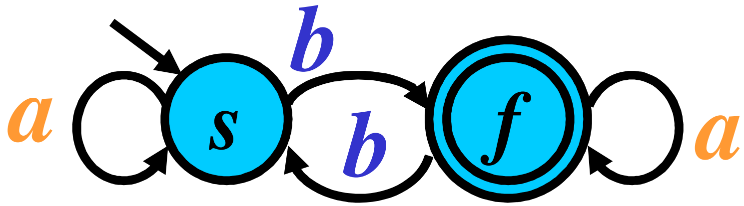
$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

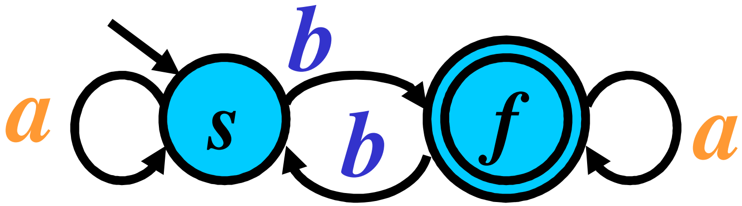
Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M:



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

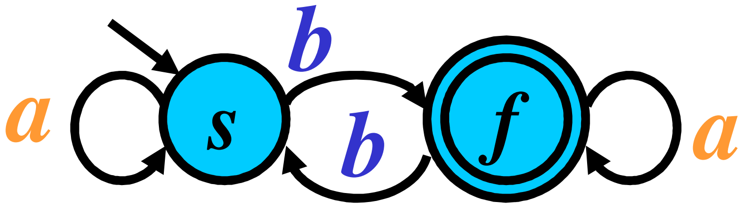
$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f; q \in Q; a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f, fa \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … s je ukončující

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

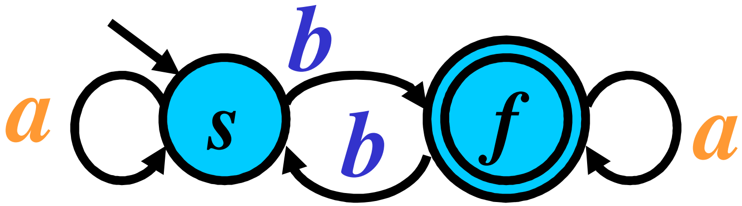
1. $qa' \to f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \to f, fa \to f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ **…** s je ukončující

Odpověď: NE, protože s je ukončující

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M:



Otázka: $ab \in L(M)$?

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$?

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f, fa \rightarrow f$

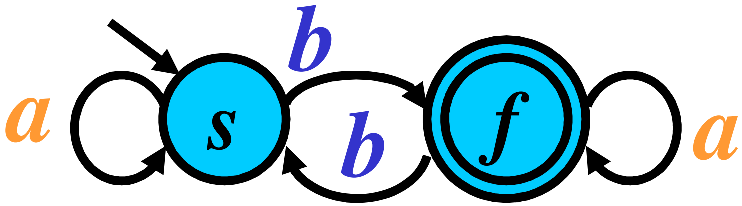
$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … s je ukončující

Odpověď: NE, protože s je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný?

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f, fa \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ **…** s je ukončující

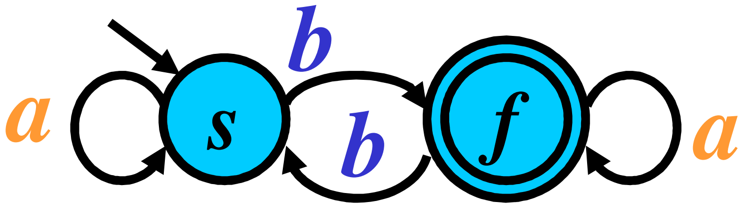
Odpověď: NE, protože s je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný? $k = \mathrm{Card}(Q) = 2$

Všechny řetězce $z \in \Sigma^*$: $2 \leq |z| < 4$: aa, bb, ab , ...

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^{*} f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f, fa \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ **…** s je ukončující

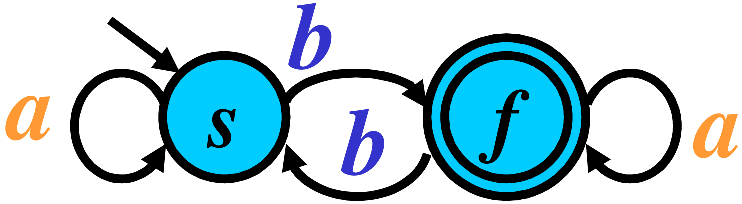
Odpověď: NE, protože s je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný? $k = \mathrm{Card}(Q) = 2$

Všechny řetězce $z \in \Sigma^*$: $2 \leq |z| < 4$: aa, bb, $\boxed{ab \in L(M)}$, **…**

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f$, $f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f$, $f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f$, $fa \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ **…** ***s*** je ukončující

Odpověď: NE, protože ***s*** je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný? $k = \mathrm{Card}(Q) = 2$

Všechny řetězce $z \in \Sigma^*$: $2 \leq |z| < 4$: aa, bb, $\boxed{ab \in L(M)}$, **…**

Odpověď: NE, protože existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Algoritmus: Problém ekvivalence

- **Vstup:** Dva minimální KA, M_1 a M_2
- **Výstup:** **ANO**, pokud $L(M_1) = L(M_2)$

  NE, pokud $L(M_1) \neq L(M_2)$

- **Metoda:**
- **if** M_1 má stejnou strukturu jako M_2 až na pojmenování stavů

  then napiš('**ANO**')

  else napiš('**NE**')

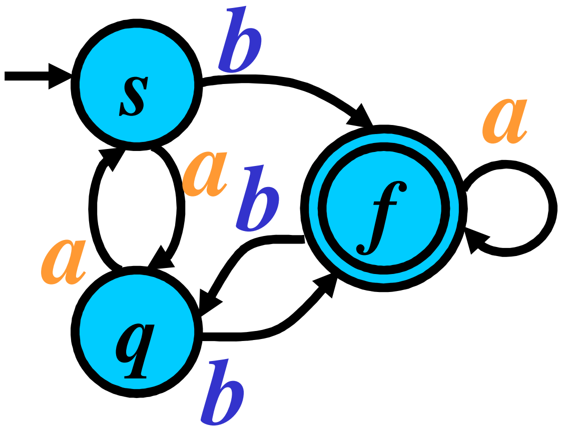
Celkově:

Problém ekvivalence je pro KA rozhodnutelný

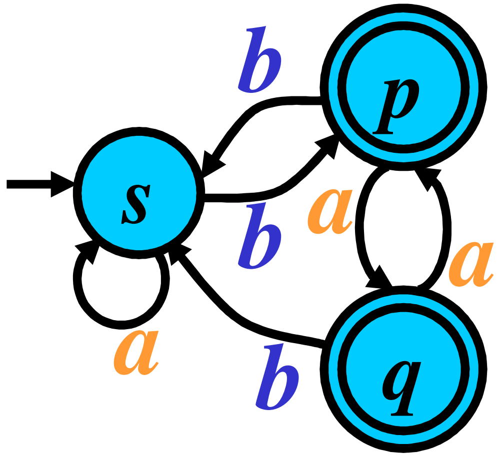
Problém ekvivalence: Příklad

Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$?

M_1:



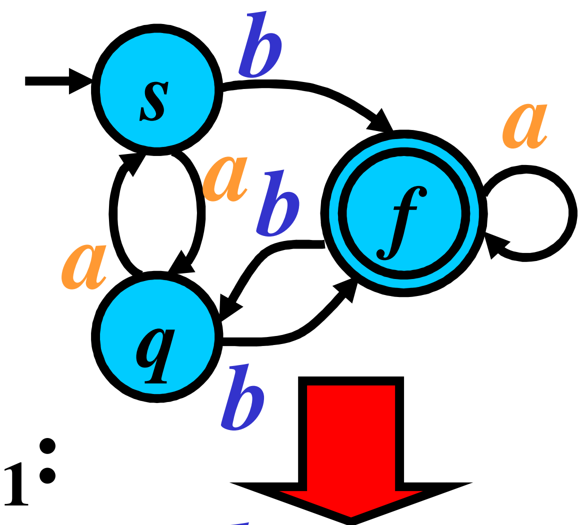
M_2:



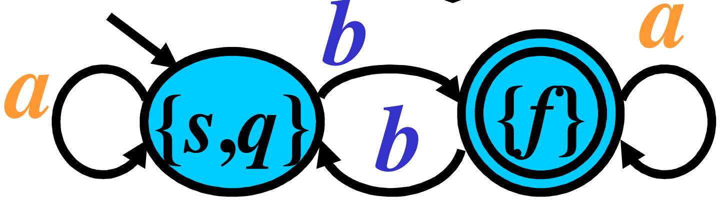
Problém ekvivalence: Příklad

Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$?

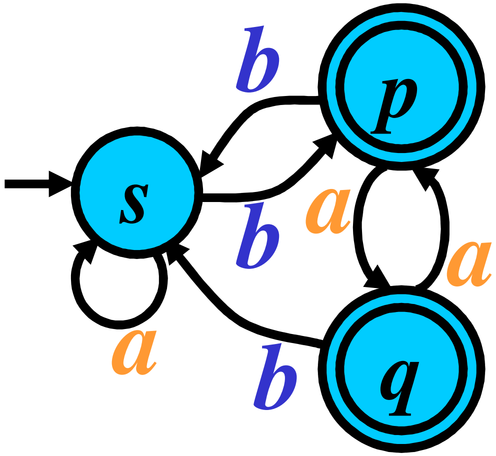
M_1:



M_{min1}:

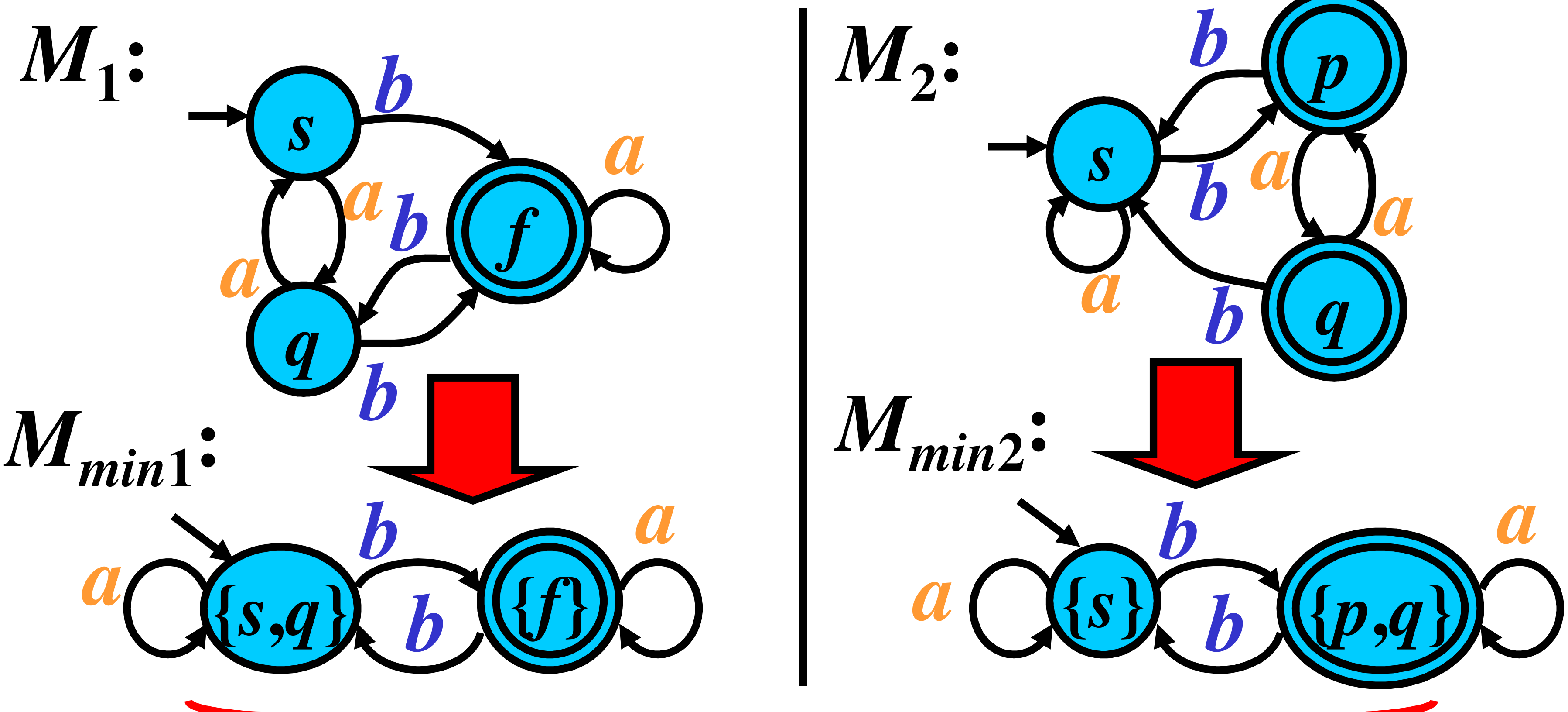


M_2:



Problém ekvivalence: Příklad

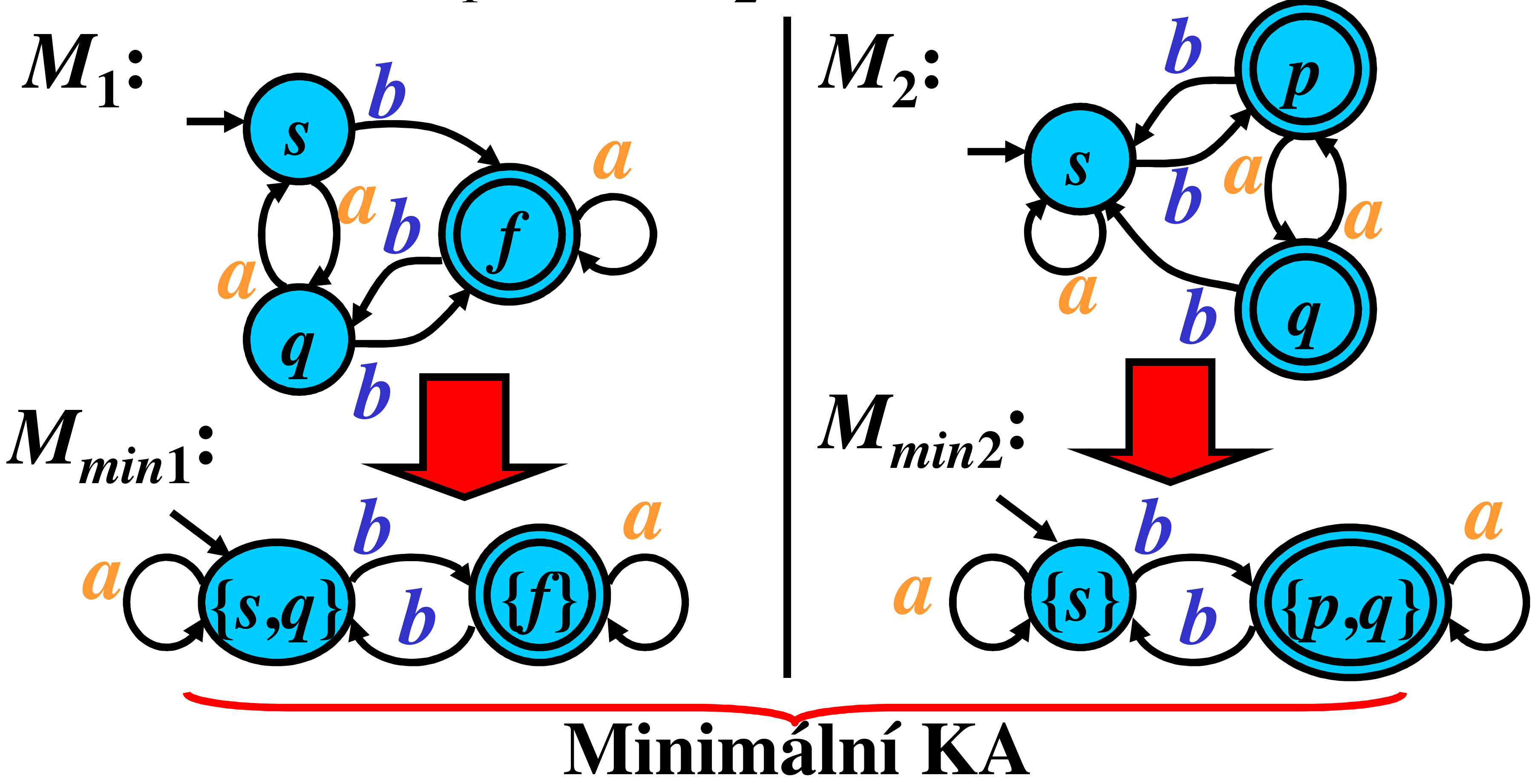
Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$?



Minimální KA

Problém ekvivalence: Příklad

Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$?



Odpověď: ANO, protože M_{min1} má stejnou strukturu jako M_{min2}