1. Binární strom o výšce h, protože z definice platí $\forall v \in V(G): \deg_G(v) \leq 3$. Musí také platit, že v každé hladině je maximální počet vrcholů, vyjma poslední.

Vím, že # listů $\geq 2^{h-1}$

$$2k \geq 2^h$$

$$h \geq \log_2(2k) \rightarrow \text{Strom o výšce} \geq \lceil h \rceil.$$

2. Navrhnu algoritmus pro konstrukci, který nikdy neskončí...

Graf $G=(V,E)$, dvě partity A, B ; $i, j = 1$

1. Vytvořím vrchol u_i v partitě A
2. Vytvořím vrchol v_j v partitě B
3. Vytvořím hranu $e = \{u_i, v_j\}$ → sled sudé délky
4. Vytvořím vrchol u_{i+1} v partitě A
5. Vytvořím hranu $e = \{v_j ; u_{i+1}\}$ → sled liché délky → uzavři jej hranou $e = \{u_i ; u_{i+1}\}$ → není bipartitní — <u>spor</u>
6. Vytvořím vrchol v_{j+1} v partitě B
7. Vytvořím hranu $e = \{u_{i+1} ; v_{j+1}\}$ → sled sudé délky
8. Přidávám další vrcholy

Algoritmus nikdy nedospěje do stavu, kdy by existoval sled liché délky a jeho konce by byli v různých partitách.

③ • Strom o n vrcholech má vždy $n-1$ hran.

Důkaz: 1) Mějme strom o jednom vrcholu

2) S každým dalším vrcholem musím přidat jednu hranu

- Přidám pouze vrchol – není souvislý → spor
- Přidám pouze hranu – vznikne cyklus → spor

• Komponenty souvislosti lesa jsou stromy

• Mezi dvěma stromy (tj. dvěmi komponentami souvislosti) "chybí" právě jedna, k tomu, aby vznikl strom

Důkaz

- Pokud bych mezi dvě komponenty souvislosti vložil více než jednu hranu, tak ze souvislosti stromů vznikne cykly → spor

⇒ mezi c komponentami souvislosti chybí právě $c-1$ hran, aby to byl strom

⇒ Les o n vrcholech a c komponentách souvislosti má právě $(n-1)-(c-1) = \underline{n-c}$ hran.

④ Důkaz sporem

- Uvažme graf, kde existují dvě nejdelší cesty o délce a, které nemají společný vrchol
- Aby byl graf souvislý, musí alespoň mezi dvěma vrcholy, po jednom z každé, existovat hrana
- Pak se ale alespoň jedna z cest prodlouží alespoň na $a+1$ → cesty nejsou nejdelší → spor

Důkaz viz tabule:

• Nechť $x_1 - x_a$ a $y_1 - y_a$ jsou nejdelší cesty, jež jsou spojeny hranou mezi vrcholy x_i a y_j, kde $1 \le i,j \le a$

(4) $\underbrace{x_1 — x_i}_{i-1},\ \underbrace{y_j — y_a}_{a-j}$

$\underbrace{y_1 — y_j}_{j-1},\ \underbrace{x_i — x_a}_{a-i}$

$\underbrace{x_1 — x_i}_{i-1},\ \underbrace{y_j — y_1}_{j-1}$

$\underbrace{x_a — x_i}_{a-i},\ \underbrace{y_j — y_a}_{a-j}$

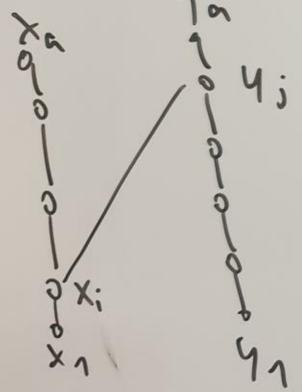
$c_1 = i - 1 + a - j + 1$

$c_2 = j - 1 + a - i + 1$

$c_3 = i + j - 2 + 1$

$c_4 = 2a - i - j + 1$

$1 \leq i, j \leq a$



i	j	c_1	c_2	c_3	c_4
1	1	a	a	1	$2a-1$
1	a	1	$2a-1$	a	a
a	1	$2a-1$	1	a	a
a	a	a	a	$2a-1$	1

$\boxed{\text{VŽDY } \exists \text{ CESTA DÉLKY } 2a-1 \text{ !}}$