

Buď $A = \begin{pmatrix} 2+2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Nad kterým tělesem typu $\mathbb{Z}_p, p \geq 3$, platí $(1, 1, 1)^T \in \text{Ker}(A^3)$

b) Nad kterým tělesem typu $\mathbb{Z}_p, p \geq 3$, platí $(1, 2, 1)^T \in \text{Ker}(A^T) \cap \mathcal{R}(A^{88})$? (3 body)

(varianta B) Najděte dva různé vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové, že $f(x) = f(y) = (0, -1, 2)^T$ při lineárním zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaném maticí ${}_{\text{kan}}[f]_B =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a bázi $B = \{(4, 4, 2)^T, (2, 1, 1)^T, (3, 2, 1)^T\}$. (6 bodů)

3) Buď $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pro lineární zobrazení $f : R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}$

definované $f(A) = BA + AC$ najděte:

bázi obrazu $f(R^{2 \times 2})$,

bázi jadra,

bázi prostoru matic $A \in R^{2 \times 2}$ splňujících $f(A) = f(f(A))$.